Указание. Воспользоваться формулой Грина (7), гл. XVIII, положив в этой формуле $v=1$.

2. Доказать теорему о максимуме и минимуме с помощью формулы (34).

Указание. Воспользоваться тем, что на шаровой поверхности достаточно малого радиуса, окружающей точку максимума или минимума функции u, производная $\frac{du}{dn}$ сохраняет знак.

3. Опираясь на интегральную формулу Дирихле, доказать единственность решения задачи Дирихле.

4. Применив теорему о максимуме и минимуме к шару неограниченно большого радиуса, доказать теорему Лиувилля: функция, гармоническая во всем пространстве, тождественно равна нулю.

5. Опираясь на теорему Кельвина, показать, что внешняя задача Дирихле может быть сведена к внутренней.

§ 5. Фундаментальные решения уравнения Лапласа. Основная формула теории гармонических функций

Как мы видели в § 1, функция

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}(\xi_\alpha-x_\alpha)^2}}, \tag{36}$$

где ξ_j, x_j $(j=1, 2, 3)$ — координаты двух точек ξ и x, при $\xi\neq x$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Так как выражение $\frac{1}{r}$ симметрично относительно координат точек ξ и x, это справедливо при дифференцировании по координатам как точки ξ, так и точки x. При $\xi=x$ функция $\frac{1}{r}$ испытывает бесконечный разрыв.

Если функция $\varphi(\xi, x)$ в области V гармонична по координатам точки ξ и непрерывна вместе со своими первыми производными, то функцию

$$L(\xi, x)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r}+\varphi(\xi, x)\right] \tag{37}$$

будем называть *фундаментальным решением уравнения Лапласа в области V*.

Используя свойства фундаментальных решений, можно вывести важные интегральные формулы, связывающие значение произвольной достаточно гладкой функции в какой-либо точке внутри или на границе области ее определения с совокупностью значений этой функции и ее нормальной производной на границе рассматриваемой области.

Рассмотрим сначала ограниченные области. Пусть V — такая область. Когда точка x лежит вне области V, фундаментальное решение $L(\xi, x)$ в этой области гармонично, вследствие чего, положив в формуле Грина (7), гл. XVIII,

$$v(\xi)=L(\xi, x),$$

получим:

$$\iint_{\mathcal{F}V}\left(L\frac{du}{dn}-u\frac{dL}{dn}\right)dS_\xi=\iiint_V L\,\Delta u\,dV_\xi,\quad x\in R_E-V, \tag{38}$$

где через R_E обозначено *все пространство*, а точка x рассматривается как параметр. Когда точка x лежит внутри области V, то формулу Грина можно применить в области $V-\Omega_\varepsilon$, где Ω_ε — лежащий в области V шар произвольно малого радиуса ε с центром в точке x. При этом вместо соотношения (38) получим:

$$\iint_{\mathcal{F}V}\left(L\frac{du}{dn}-u\frac{dL}{dn}\right)dS_\xi=\iiint_{V-\Omega_\varepsilon}L\,\Delta u\,dV_\xi-\iint_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon}L\frac{du}{dn}dS_\xi+\iint_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon}u\frac{dL}{dn}dS_\xi.$$

При $\varepsilon\to 0$ интеграл $\iiint_{V-\Omega_\varepsilon}L\,\Delta u\,dV_\xi$ стремится к несобственному интегралу $\iiint_V L\,\Delta u\,dV_\xi$, если последний существует. Интеграл $\iint_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon}L\frac{du}{dn}dS_\xi$ стремится к нулю, поскольку производная $\frac{du}{dn}$ непрерывна (по предположению, принятому при выводе формулы Грина) и, следовательно, ограничена, а функция $L(\xi, x)$ растет на $\mathcal{F}\Omega$. как $\frac{1}{\varepsilon}$, тогда как площадь поверхности $\mathcal{F}\Omega_\varepsilon$ убывает как ε^2.

Рассмотрим поведение интеграла от $u\frac{dL}{dn}$. В силу равенства (37):

$$\iint_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon}u\frac{dL}{dn}dS_\xi=\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon}u\frac{d\varphi}{dn}dS_\xi+\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon}u\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS_\xi.$$

Первый из интегралов в правой части при $\varepsilon\to 0$ обращается в нуль, так как подынтегральное выражение ограничено. Подынтегральное выражение во втором интеграле преобразуем, воспользовавшись тем, что на шаровой поверхности $\mathcal{F}\Omega_\varepsilon$ $\frac{d}{dn}=-\frac{d}{dr}$, так как внешняя нормаль к границе области $V-\Omega_\varepsilon$ направлена вдоль радиуса r внутрь шара Ω_ε. Это даст:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon}u\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS_\xi=\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon}\frac{u}{r^2}dS_\xi=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon}u\,dS_\xi.$$

По теореме о среднем

$$\iint_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon}u\,dS_\xi=u_{\text{ср}}\iint_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon}dS_\xi,$$

где $u_{\text{ср}}$ — значение функции u в некоторой точке, принадлежащей шару Ω_ε. Заметив, что интеграл $\iint_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon}dS_\xi$ равен площади $4\pi\varepsilon^2$ поверхности $\mathcal{F}\Omega_\varepsilon$, а при $\varepsilon \to 0$ величина $u_{\text{ср}}$ стремится к $u(x)$, так как функция u непрерывна, получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon} u \frac{dL}{dn} dS_\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u_{\text{ср}}}{4\pi\varepsilon^2} \iint\limits_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon} dS_\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} u_{\text{ср}} = u(x). \tag{39}$$

Учтя найденные значения пределов, окончательно получим:

$$\iint\limits_{\mathcal{F}V} \left(L \frac{du}{dn} - u \frac{dL}{dn} \right) dS_\xi = \iiint\limits_{V} L \, \Delta u \, dV_\xi + u(x) \quad (x \in V - \mathcal{F}V). \tag{40}$$

Предположим, наконец, что точка x расположена на граничной поверхности $\mathcal{F}V$. Применив формулу Грина в области $V - \Omega'_\varepsilon$, где Ω'_ε — лежащая в области V часть шара Ω_ε, описанного малым радиусом ε из точки x, получим

$$\iint\limits_{\mathcal{F}V - \omega_\varepsilon} \left(L \frac{du}{dn} - u \frac{dL}{dn} \right) dS_\xi = \iiint\limits_{V - \Omega'_\varepsilon} L \, \Delta u \, dV - \iint\limits_{\omega'_\varepsilon} L \frac{du}{dn} dS_\varepsilon + \iint\limits_{\omega'_\varepsilon} u \frac{dL}{dn} dS_\xi,$$

где ω_ε — часть граничной поверхности $\mathcal{F}V$, лежащая в шаре Ω_ε, а ω'_ε — часть поверхности шара Ω_ε, лежащая в области V. При $\varepsilon \to 0$ интеграл в левой части этого соотношения стремится к несобственному интегралу по $\mathcal{F}V$. За его значение примем предел правой части, при вычислении которого мы можем повторить все рассуждения предыдущего случая, за тем исключением, что теперь в формуле (39) вместо интеграла $\iint\limits_{\mathcal{F}\Omega_\varepsilon} dS_\xi$ будет фигурировать интеграл $\iint\limits_{\omega'_\varepsilon} dS_\xi$, равный площади той части поверхности шара Ω_ε, которая лежит в области V.

Введем в точке x местную декартову систему координат $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, направив ось 3 вдоль внешней нормали к поверхности $\mathcal{F}V$ в точке x. По предположению (гл. XVIII, § 1), внутри некоторого шара с центром в точке x уравнение поверхности $\mathcal{F}V$ можно записать в виде

$$\zeta_3 = f(\zeta_1, \zeta_2),$$

где функция f и ее производные первого порядка непрерывны и обращаются в точке x в нуль. Вследствие этого, по определению дифференцируемой функции, в малой окрестности точки x имеет место соотношение:

$$\zeta_3 = h_1\zeta_1 + h_2\zeta_2,$$

где величины h_1 и h_2 обращаются в нуль одновременно с ζ_1, ζ_2. Введем сферические координаты r, θ, φ, положив

$$\zeta_1 = r \sin\theta \cos\varphi, \quad \zeta_2 = r \sin\theta \sin\varphi, \quad \zeta_3 = r \cos\theta.$$

Подставив эти выражения в найденное выше соотношение, получим

$$\cos\theta = h_1 \sin\theta\cos\varphi + h_2 \sin\theta \sin\varphi = h(r, \theta, \varphi), \tag{41}$$

где h — функция, ограниченная и обращающаяся в нуль одновременно с r, а θ — угловая координата точки на поверхности $\mathcal{F}V$. Воспользовавшись этим выражением, придем к следующей оценке интересующего нас интеграла

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{\omega'_\varepsilon} dS_\xi = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{\omega'_\varepsilon} r^2 \sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \int\limits_0^{\theta} \sin\theta'\,d\theta' =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta'\,d\theta' + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \sin\theta'\,d\theta' = \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \left[-\cos\theta'\right]_{\pi/2}^{\theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(\varepsilon, \theta, \varphi')\,d\varphi' = \frac{1}{2} + H(\varepsilon),$$

где $H(\varepsilon) \equiv \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(\varepsilon, \theta, \varphi')\,d\varphi'$ — ограниченная функция, обращающаяся в нуль одновременно с ε. Вследствие этого

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{\omega'_\varepsilon} u\frac{dL}{dn}\,d_\xi S = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{u_{\text{ср}}}{4\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{\omega'_\varepsilon} dS_\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} u_{\text{ср}}\left[\frac{1}{2} + H(\varepsilon)\right] = \frac{u(x)}{2},$$

что приведет нас к соотношению

$$\iint\limits_{\mathcal{F}V}\left(L\frac{du}{dn} - u\frac{dL}{dn}\right)dS_\xi = \iiint\limits_V L\,\Delta u\,dV_\xi + \frac{u(x)}{2} \qquad (x \in \mathcal{F}V). \tag{42}$$

Объединив формулы (38), (40) и (42) в одну, можем записать:

$$\iint\limits_{\mathcal{F}V}\left(L\frac{du}{dn} - u\frac{dL}{dn}\right)dS_\xi =$$

$$= \iiint\limits_V L\,\Delta u\,dV + \begin{cases} 0, \text{ когда } x \in R_E - V, \\ \frac{1}{2}u(x), \text{ когда } x \in \mathcal{F}V, \\ u(x), \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V. \end{cases} \tag{43}$$

Если функция u гармонична в области V, то формула (43) примет вид:

$$\iint\limits_{\mathcal{F}V}\left(L\frac{du}{dn} - u\frac{dL}{dn}\right)dS_\xi = \begin{cases} 0, \quad \text{когда } x \in R_E - V, \\ \frac{1}{2}u(x), \quad \text{когда } x \in \mathcal{F}V, \\ u(x), \quad \text{когда } x \in V - \mathcal{F}V. \end{cases} \tag{44}$$

Это соотношение называют *основной формулой теории гармонических функций.*

Она переносится и на бесконечные области. Пусть V — бесконечная область с конечной границей $\mathcal{F}V$, а V^* — часть области V, лежащая в шаре Ω конечного радиуса r, содержащем границу $\mathcal{F}V$ внутри себя. Применив формулу (44) в области V^*, придем к формуле, левая часть которой по виду будет отличаться от левой части формулы (44) тем, что в ней добавится интеграл

$$\iint\limits_{\mathcal{F}\Omega}\left(L\frac{du}{dn}-u\frac{dL}{dn}\right)dS_{\xi}.$$

При неограниченном возрастании радиуса шара этот интеграл стремится к нулю, так как, в силу леммы § 3 о поведении гармонической функции на бесконечности и определения фундаментального решения $L(\xi,\ x)$, подынтегральное выражение при этом убывает как $\frac{1}{r^3}$, тогда как площадь поверхности $\mathcal{F}V$ шара Ω растет лишь как r^2. Перейдя к пределу при $r\to\infty$, снова получим формулу

$$\iint\limits_{\mathcal{F}V}\left(L\frac{du}{dn}-u\frac{dL}{dn}\right)dS_{\xi}=\begin{cases}0, & \text{когда } x\in R_E-V,\\ \frac{1}{2}u(x), & \text{когда } x\in\mathcal{F}V,\\ u(x), & \text{когда } x\in V-\mathcal{F}V,\end{cases}\tag{45}$$

совпадающую с формулой (44) для ограниченных областей.

Опираясь на формулы (44) и (45) покажем, что внутри области гармоничности *любая гармоническая функция дифференцируема неограниченное число раз.* Для этого положим: $L(\xi,\ x)=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r}$. Фундаментальное решение $\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r}$ в любой области, не содержащей точку $\xi=x$, дифференцируемо по координатам точки x неограниченное число раз, причем результат дифференцирования всякий раз представляет ограниченную функцию переменной ξ. Если x — внутренняя точка области V, то $\xi\neq x$, когда $\xi\in\mathcal{F}V$. Следовательно, интегралы (44) и (45) можно дифференцировать по координатам точки x, как по параметрам, неограниченное число раз. Это доказывает высказанное утверждение, когда гармоническая функция u непрерывна в области V вместе со своими первыми производными. Если непрерывность первых производных не имеет места, высказанное утверждение все же справедливо, так как в формулах (44) и (45) от интегрирования по поверхности $\mathcal{F}V$ можно перейти к интегрированию по поверхности S, лежащей целиком внутри области V и заключающей точку x внутри себя. Так как внутри области гармоничности всякая гармоническая функция дважды дифференцируема, то формула, содержащая интеграл по поверхности S, будет иметь смысл и, следовательно из нее снова будет следовать неограниченная дифференцируемость функции $u(x)$.

Пусть Ω — шар, описанный радиусом a из точки x, и целиком лежащий в области гармоничности функции u. На поверхности шара Ω: $\frac{d}{dn}=\frac{d}{dr}$. Положим как и выше: $L(\xi, x)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$. Тогда, в силу соотношения (34), формула (44) примет вид:

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\mathcal{F}\Omega} u\,dS_\xi = u(x), \tag{46}$$

т. е. среднее арифметическое значение гармонической функции на поверхности шара равно ее значению в его центре. Это утверждение носит название *теоремы о среднем значении* гармонической функции.

ЗАДАЧИ

1. Опираясь на формулу (46), доказать, что гармонические функции внутри области своего определения не только дифференцируемы неограниченное число раз, но и аналитичны.
2. Показать, что функция, удовлетворяющая условию (46), гармонична.

§ 6. Формула Пуассона. Решение задачи Дирихле для шара

Пусть ζ — произвольная переменная точка, u — функция, гармоническая в шаре Ω, определенном уравнением $|\zeta|\leqslant 1$, x — точка внутри шара Ω, а ξ — точка, гармонически сопряженная с точкой x (§ 3). Введем обозначения:

$$r_0\equiv|x|,\quad r\equiv|x-\zeta|,\quad r^*\equiv|\xi-\zeta|.$$

Функции $\frac{1}{4\pi r}$ и $\frac{1}{4\pi r^*}$ являются фундаментальными решениями уравнения Лапласа с особыми точками соответственно внутри и вне шара Ω. Следовательно, применив основную формулу (44), получим:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\zeta|=1}\left[\frac{1}{r^*}\frac{du}{dn}-u\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r^*}\right)\right]dS_\zeta=0, \tag{47}$$

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\zeta|=1}\left[\frac{1}{r}\frac{du}{dn}-u\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS_\zeta=u(x). \tag{48}$$

Приняв во внимание, что $\xi_j=\frac{x_j}{r_0^2}$ $(j=1,\ 2,\ 3)$ и что $\sum\limits_{\alpha=1}^{3}\zeta_\alpha^2=1$,