интеграл по поверхности S, будет иметь смысл и, следовательно из нее снова будет следовать неограниченная дифференцируемость функции $u(x)$.

Пусть Ω — шар, описанный радиусом a из точки x, и целиком лежащий в области гармоничности функции u. На поверхности шара Ω: $\frac{d}{dn}=\frac{d}{dr}$. Положим как и выше: $L(\xi, x)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$. Тогда, в силу соотношения (34), формула (44) примет вид:

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\mathcal{F}\Omega} u\,dS_\xi = u(x), \tag{46}$$

т. е. среднее арифметическое значение гармонической функции на поверхности шара равно ее значению в его центре. Это утверждение носит название *теоремы о среднем значении* гармонической функции.

ЗАДАЧИ

1. Опираясь на формулу (46), доказать, что гармонические функции внутри области своего определения не только дифференцируемы неограниченное число раз, но и аналитичны.

2. Показать, что функция, удовлетворяющая условию (46), гармонична.

§ 6. Формула Пуассона. Решение задачи Дирихле для шара

Пусть ζ — произвольная переменная точка, u — функция, гармоническая в шаре Ω, определенном уравнением $|\zeta|\leqslant 1$, x — точка внутри шара Ω, а ξ — точка, гармонически сопряженная с точкой x (§ 3). Введем обозначения:

$$r_0\equiv|x|,\quad r\equiv|x-\zeta|,\quad r^*\equiv|\xi-\zeta|.$$

Функции $\frac{1}{4\pi r}$ и $\frac{1}{4\pi r^*}$ являются фундаментальными решениями уравнения Лапласа с особыми точками соответственно внутри и вне шара Ω. Следовательно, применив основную формулу (44), получим:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\zeta|=1}\left[\frac{1}{r^*}\frac{du}{dn}-u\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r^*}\right)\right]dS_\zeta=0, \tag{47}$$

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\zeta|=1}\left[\frac{1}{r}\frac{du}{dn}-u\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS_\zeta=u(x). \tag{48}$$

Приняв во внимание, что $\xi_j=\frac{x_j}{r_0^2}$ $(j=1,\ 2,\ 3)$ и что $\sum\limits_{\alpha=1}^{3}\zeta_\alpha^2=1$, когда $\zeta \in \mathcal{F}\Omega$, для точек $\zeta \in \mathcal{F}\Omega$ получим:

$$r^* = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{x_\alpha}{r_0^2} - \zeta_\alpha\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 2\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{x_\alpha \zeta_\alpha}{r_0^2} + 1} =$$

$$= \frac{1}{r_0}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3} (x_\alpha - \zeta_\alpha)^2} = \frac{r}{r_0},$$

или

$$r^* = \frac{r}{r_0}, \quad \text{когда } \zeta \in \mathcal{F}\Omega. \tag{49}$$

Умножив соотношение (47) на величину $-\frac{1}{r_0}$ и сложив его с соотношением (48), в силу формулы (49), получим

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\zeta|=1}\int u \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r_0 r^*} - \frac{1}{r}\right) dS_\zeta. \tag{50}$$

Так как радиус шаровой поверхности $\mathcal{F}\Omega$ равен единице, то координаты ζ_j $(j = 1, 2, 3)$ точки ζ численно равны направляющим косинусам внешней нормали к поверхности $\mathcal{F}\Omega$ в точке ζ. Поэтому

$$\frac{d}{dn} = \sum_{\alpha=1}^{3} \zeta_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha}.$$

Приняв во внимание соотношение (49), получим:

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) = \sum_{\alpha=1}^{3} \zeta_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\sum_{\alpha=1}^{3} \zeta_\alpha \frac{\partial r}{\partial \zeta_\alpha} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\zeta_\alpha (x_\alpha - \zeta_\alpha)}{r} = \frac{1}{r^3}\sum_{\alpha=1}^{3} \zeta_\alpha x_\alpha - \frac{1}{r^3}.$$

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r^*}\right) = \sum_{\alpha=1}^{3} \zeta_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha}\left(\frac{1}{r^*}\right) = \frac{1}{r^{*3}}\sum_{\alpha=1}^{3} \zeta_\alpha \xi_\alpha - \frac{1}{r^{*3}} =$$

$$= \frac{1}{r^{*3} r_0^2}\sum_{\alpha=1}^{3} \zeta_\alpha x_\alpha - \frac{1}{r^{*3}} = \frac{r_0}{r^3}\sum_{\alpha=1}^{3} \zeta_\alpha x_\alpha - \frac{r_0^3}{r^3},$$

в силу чего

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r_0 r^*} - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r_0}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r^*}\right) - \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{r_0^2}{r^3} + \frac{1}{r^3} = \frac{1 - r_0^2}{r^3}.$$

Подставив это выражение в формулу (50), получим *формулу Пуассона*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\int u \frac{1 - r_0^2}{r^3} dS_\zeta, \tag{51}$$

определяющую значения гармонической функции u в точках внутри шара $|x| \leqslant 1$ по значениям этой функции на его поверхности.

Подставив в формулу Пуассона вместо u произвольную непрерывную функцию $\psi(\zeta)$ точки ζ поверхности шара $|x| \leqslant 1$, получим некоторую функцию

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{|\zeta|=1} \psi \frac{1-r_0^2}{r^3} dS_\zeta. \tag{52}$$

Покажем, что эта функция является решением задачи Дирихле:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u = 0, \quad &\text{когда} \quad |x| < 1; \\ u = \psi, \quad &\text{когда} \quad |x| = 1. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Доказательство разобьем на два этапа: сначала докажем, что внутри шара $|x| \leqslant 1$ функция u гармонична, а затем докажем, что при $|x| \to 1$ функция $u \to \psi$.

Рассмотрим подынтегральное выражение

$$\psi \frac{1-r_0^2}{r^3} \equiv \psi(\zeta) \frac{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}{[(x_1-\zeta_1)^2+(x_2-\zeta_2)^2+(x_3-\zeta_3)^2]^{3/2}}, \qquad |\zeta| = 1. \tag{54}$$

Если точка x лежит внутри шара, оно непрерывно и ограничено, когда $|\zeta| = 1$. Поэтому при $|x| < 1$ можно изменять порядок интегрирования по ζ и дифференцирования по координатам точки x. Так как подынтегральное выражение, как функция точки x, при $|x| < 1$ имеет непрерывные вторые производные и удовлетворяет уравнению Лапласа (в чем можно убедиться непосредственной подстановкой его в уравнение), то при $|x| < 1$ интеграл (52) представляет гармоническую функцию.

Докажем теперь, что на поверхности $|\zeta| = 1$ интеграл (52) принимает те же значения, что и функция ψ.

Рассмотрим некоторую конечную область, заключающую поверхность $|\zeta| = 1$ внутри себя. В этой области и на ее границе функция $u \equiv 1$ гармонична. Поэтому к ней может быть применена формула Пуассона, что даст

$$\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{|\zeta|=1} \frac{1-r_0^2}{r^3} dS_\zeta = 1.$$

Составим разность

$$u(x) - \psi(y) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{|\zeta|=1} \frac{1-r_0^2}{r^3} [\psi(\zeta) - \psi(y)] \, dS_\zeta,$$

где y — произвольная точка поверхности $|\zeta| = 1$. Выделим на поверхности Σ, определяемой уравнением $|\zeta| = 1$, небольшую часть σ, лежащую внутри шара радиуса η с центром в точке y, и рассмотрим интегралы

$$J_1=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{1-r_0^2}{r^3}\left[\psi(\zeta)-\psi(y)\right]dS_\zeta, \tag{55}$$

$$J_2=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma-\sigma}\frac{1-r_0^2}{r^3}\left[\psi(\zeta)-\psi(y)\right]dS_\zeta. \tag{56}$$

Легко найдем, что

$$|J_1|=\frac{1}{4\pi}\left|\iint\limits_{\sigma}\frac{1-r_0^2}{r^3}\left[\psi(\zeta)-\psi(y)\right]dS_\zeta\right|\leqslant\frac{M}{4\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{1-r_0^2}{r^3}dS_\zeta<$$

$$<\frac{M}{4\pi}\iint\limits_{|\zeta|=1}\frac{1-r_0^2}{r^3}dS_\zeta=M,$$

где M — верхняя граница разности $\psi(\zeta)-\psi(y)$ при $\zeta\in\sigma$. В силу непрерывности функции ψ радиус η всегда можно выбрать настолько малым, чтобы было

$$|J_1|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{57}$$

где ε — произвольное положительное число. Так как функция ψ непрерывна, то она ограничена на Σ. Поэтому существует такое число A, что $|\psi|<A$ при $\zeta\in\Sigma$. Вследствие этого, для интеграла J_2 получим оценку

$$|J_2|=\frac{1}{4\pi}\left|\iint\limits_{\Sigma-\sigma}\frac{1-r_0^2}{r^3}\left[\psi(\zeta)-\psi(y)\right]dS_\zeta\right|\leqslant\frac{2A}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma-\sigma}\frac{1-r_0^2}{r^3}dS_r\leqslant 2AM^*,$$

где M^* — верхняя граница выражения $\frac{1-r_0^2}{r^3}$ на $\Sigma-\sigma$. Каков бы ни был радиус η, точку x можно настолько приблизить к точке y, что разность $1-r_0^2$ будет в неограниченное число раз меньше η, тогда как расстояние $r\equiv|x-\zeta|$ при $\zeta\in\Sigma-\sigma$ будет одного порядка с η. Поэтому при любом η, взяв точку x достаточно близко к точке y, можно добиться, чтобы было

$$|J_2|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что при достаточной близости точки x к точке y

$$|u(x)-\psi(y)|=|J_1+J_2|\leqslant|J_1|+|J_2|<\varepsilon.$$

В силу произвольности числа ε заключим, что когда точка x, оставаясь внутри шара $|\zeta|\leqslant 1$, стремится к точке y на его поверхности, то $u(x)\to\psi(y)$, что и утверждалось.

Заметим, что нам удалось построить решение внутренней задачи Дирихле для шара $|\zeta|\leqslant 1$ при произвольном непрерывном граничном условии. Тем самым мы доказали и *существование* этого решения.

Полученный результат путем линейного преобразования координат обобщается на задачу Дирихле, поставленную для произвольного шара.

ЗАДАЧИ

1. Опираясь на формулу Пуассона, доказать теорему о среднем значении гармонической функции (§ 5).

2. Опираясь на теорему о среднем значении, доказать теорему о максимуме и минимуме гармонической функции (§ 3).

§ 7. Функция Грина

В этом параграфе будем рассматривать решения граничных задач, принадлежащие классу функций, непрерывных в изучаемой области вместе со своими первыми производными. Это даст нам возможность широко использовать интегральные формулы (43) и (44).

Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= f, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V, \\ u &= \psi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

где V — ограниченная область, а f и ψ — непрерывные функции. Предположим, что

$$G(\xi, x) \equiv \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r} + \varphi(\xi, x)\right] \qquad (r \equiv |\xi - x|) \tag{59}$$

— фундаментальное решение уравнения Лапласа в области V, обращающееся в нуль на ее границе $\mathcal{F}V$. Для этого функция $\varphi(\xi, x)$ должна быть решением граничной задачи:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_\xi \varphi(\xi, x) &= 0, \quad \text{когда} \quad \xi,\ x \in V - \mathcal{F}V; \\ \varphi(\xi, x) &= -\frac{1}{r}, \quad \text{когда} \quad \xi \in \mathcal{F}V,\ x \in V - \mathcal{F}V. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Подставив в формулу (43) значения величин, заданные в граничной задаче (58), и положив $L(\xi, x) = G(\xi, x)$, получим

$$u(x) = -\iint\limits_{\mathcal{F}V} \psi \frac{dG}{dn} dS_\xi - \iiint\limits_V fG\, dV \qquad (x \in V - \mathcal{F}V). \tag{61}$$

Если фундаментальное решение $G(\xi, x)$ и его производная $\frac{dG}{dn}$ существуют, то эта формула даст решение задачи Дирихле (58), принадлежащее рассматриваемому классу функций, в интегральной форме. Тем самым, решение задачи Дирихле (58) общего вида для неоднородного уравнения сможет быть заменено разысканием функции $G(\xi, x)$, для чего требуется найти решение задачи Дирихле (60) частного вида для однородного уравнения. Фундамен-