Полученный результат путем линейного преобразования координат обобщается на задачу Дирихле, поставленную для произвольного шара.

ЗАДАЧИ

1. Опираясь на формулу Пуассона, доказать теорему о среднем значении гармонической функции (§ 5).

2. Опираясь на теорему о среднем значении, доказать теорему о максимуме и минимуме гармонической функции (§ 3).

§ 7. Функция Грина

В этом параграфе будем рассматривать решения граничных задач, принадлежащие классу функций, непрерывных в изучаемой области вместе со своими первыми производными. Это даст нам возможность широко использовать интегральные формулы (43) и (44).

Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u = f, &\quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V, \\ u = \psi, &\quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

где V — ограниченная область, а f и ψ — непрерывные функции. Предположим, что

$$G(\xi, x) \equiv \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r} + \varphi(\xi, x)\right] \qquad (r \equiv |\xi - x|) \tag{59}$$

— фундаментальное решение уравнения Лапласа в области V, обращающееся в нуль на ее границе $\mathcal{F}V$. Для этого функция $\varphi(\xi, x)$ должна быть решением граничной задачи:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_\xi \varphi(\xi, x) = 0, &\quad \text{когда} \quad \xi,\ x \in V - \mathcal{F}V; \\ \varphi(\xi, x) = -\frac{1}{r}, &\quad \text{когда} \quad \xi \in \mathcal{F}V,\ x \in V - \mathcal{F}V. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Подставив в формулу (43) значения величин, заданные в граничной задаче (58), и положив $L(\xi, x) = G(\xi, x)$, получим

$$u(x) = -\iint\limits_{\mathcal{F}V} \psi \frac{dG}{dn} dS_\xi - \iiint\limits_{V} fG\,dV \qquad (x \in V - \mathcal{F}V). \tag{61}$$

Если фундаментальное решение $G(\xi, x)$ и его производная $\frac{dG}{dn}$ существуют, то эта формула даст решение задачи Дирихле (58), принадлежащее рассматриваемому классу функций, в интегральной форме. Тем самым, решение задачи Дирихле (58) общего вида для неоднородного уравнения сможет быть заменено разысканием функции $G(\xi, x)$, для чего требуется найти решение задачи Дирихле (60) частного вида для однородного уравнения. Фундаментальное решение $G(\xi, x)$ называют *функцией Грина задачи (58)* или *функцией Грина оператора Лапласа.*

Полученный результат непосредственно распространяется на внешнюю задачу Дирихле *для уравнения Лапласа*: $\Delta u = 0$. Это вытекает из совпадения формул (44) и (45) для ограниченной и бесконечной области. Что же касается внешней задачи Дирихле для уравнения Пуассона, то проведение рассуждений, аналогичных проведенным для внутренней задачи, требует обобщения формулы (43) на бесконечные области. Последнее возможно для решений уравнения Пуассона, удовлетворяющих на бесконечности неравенствам

$$u < \frac{A}{r}, \quad \left|\frac{du}{\partial x_i}\right| < \frac{A}{r^2} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3, \quad r > r_0), \tag{62}$$

где A и r_0 — ограниченные числа, аналогичным неравенствам (24) для гармонических функций, при дополнительном условии, что интеграл $\iiint\limits_V fL\,dV$ имеет смысл. В самом деле, при этом для обобщения формулы (43) достаточно провести те же рассуждения, что и при обобщении формулы (44). Неравенства (62) носят название *условий регулярности на бесконечности*. Итак, решения рассматриваемого класса внешней задачи Дирихле для уравнения Пуассона, регулярные на бесконечности, при условии, что интеграл $\iiint\limits_V fG\,dV$ имеет смысл, также представимы в форме (61), если только соответствующая функция Грина существует.

Перейдем к смешанной задаче:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= f, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V, \\ \frac{du}{dn} + \beta u &= \psi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Воспользовавшись тождеством

$$L\left(\frac{du}{dn} + \beta u\right) - u\left(\frac{dL}{dn} + \beta L\right) \equiv L\frac{du}{dn} - u\frac{dL}{dn},$$

и введя для сокращения обозначение

$$\mathcal{P} \equiv \frac{d}{dn} + \beta,$$

преобразуем формулу (43) к виду

$$u(x) = \iint\limits_{\mathcal{F}V} (L\mathcal{P}u - u\mathcal{P}L)\,dS_\xi - \iiint\limits_V L\,\Delta u\,dV, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V. \tag{64}$$

Пусть $G(\xi, x)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа в области V, удовлетворяющее условию

$$\mathcal{P}_\xi G(\xi, x) = 0, \quad \text{когда} \quad \xi \in \mathcal{F}V,\ x \in V - \mathcal{F}V. \tag{65}$$

Для этого функция $\varphi(\xi, x)$ должна быть решением граничной задачи

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_\xi \varphi = 0, && \text{когда} \quad \xi,\ x \in V - \mathcal{F}V, \\ &\mathcal{P}_\xi \varphi = -\mathcal{P}_\xi \frac{1}{r}, && \text{когда} \quad \xi \in \mathcal{F}V, \quad x \in V - \mathcal{F}V. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Подставив в формулу (64) значения величин, заданные в граничной задаче (63), и положив $L = G$, получим интегральное представление решения задачи (63):

$$u(x) = \iint\limits_{\mathcal{F}V} G\psi\, dS_\xi - \iiint\limits_V fG\, dV_\xi, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V. \tag{67}$$

Фундаментальное решение $G(\xi, x)$ называют *функцией Грина задачи* (63).

Обратимся, наконец, к задаче Неймана:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u = f, && \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V, \\ &\frac{du}{dn} = \psi, && \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Проведя те же рассуждения, что и для смешанной задачи, придем к выводу, что решение задачи Неймана выражалось бы формулой, совпадающей с формулой (67), если бы функция $\varphi(\xi, x)$ была решением граничной задачи:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_\xi \varphi = 0, && \text{когда} \quad \xi,\ x \in V - \mathcal{F}V; \\ &\frac{d\varphi}{dn_\xi} = -\frac{d}{dn_\xi}\left(\frac{1}{r}\right), && \text{когда} \quad \xi \in \mathcal{F}V, \ x \in V - \mathcal{F}V. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Но такой функции φ не существует. В самом деле, положив в формуле (44) $u = 1$, $L(\xi, x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$, найдем, что

$$\iint\limits_{\mathcal{F}V} \frac{d\varphi}{dn} dS = -\iint\limits_{\mathcal{F}V} \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS = 4\pi \neq 0, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V, \tag{70}$$

между тем как, согласно формуле (34), интеграл от нормальной производной гармонической функции по замкнутой поверхности должен быть равен нулю.

Так как не существует решения задачи (69), то не существует и фундаментального решения, имеющего нормальную производную, равную нулю на границе конечной области. Тем не менее, может существовать фундаментальное решение, нормальная производная которого на границе области постоянна и которое, в связи с этим, может играть роль, аналогичную роли функции Грина смешанной задачи (63). Чтобы найти это решение, изменим граничное условие задачи (69), положив

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\frac{4\pi}{S} - \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \text{когда} \quad \xi \in \mathcal{F}V, \quad x \in V - \mathcal{F}V.$$

Здесь $\bar{S} \equiv \int\limits_{\mathcal{F}} \int\limits_{V} dS$ — площадь поверхности $\mathcal{F}V$. Легко видеть, что соотношение (34) теперь соблюдается и, следовательно, функция φ может существовать. Определив с ее помощью фундаментальное решение

$$G(\xi, x) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} + \varphi\right),$$

найдем, что

$$\frac{dG}{dn_\xi} = -\frac{1}{\bar{S}}.$$

Подставив в формулу (43) $L = G$ и значения величин, заданные в задаче (68), получим

$$u(x) = \int\limits_{\mathcal{F}} \int\limits_{V} G\psi \, dS_\xi + \frac{1}{\bar{S}} \int\limits_{\mathcal{F}} \int\limits_{V} u \, dS_\xi - \iiint\limits_{V} fG \, dV_\xi,$$

когда

$$x \in V - \mathcal{F}V.$$

Интеграл $\frac{1}{\bar{S}} \int\limits_{\mathcal{F}} \int\limits_{V} u \, dS_\xi$ представляет среднее значение неизвестной функции u на поверхности $\mathcal{F}V$, вообще говоря, также неизвестное. Однако, как мы знаем, решения задачи Неймана определены лишь с точностью до постоянного слагаемого, подбором которого среднему значению решения на поверхности $\mathcal{F}V$ можно придать любое наперед заданное значение. Следовательно, рассматриваемый интеграл должен рассматриваться как произвольная постоянная.

Таким образом, найдя решение φ задачи

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_\xi \varphi = 0, \quad \text{когда} \quad x, \ \xi \in V - \mathcal{F}V; \\ \dfrac{d\varphi}{dn_\xi} = \dfrac{4\pi}{\bar{S}} = -\dfrac{d}{dn_\xi}\left(\dfrac{1}{r}\right), \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V, \quad \xi \in \mathcal{F}V; \\ \bar{S} \equiv \int\limits_{\mathcal{F}} \int\limits_{V} dS, \end{array}\right\} \qquad (71)$$

и определив по формуле (59) фундаментальное решение $G(\xi, x)$, можно по формуле (67) построить то из решений задачи Неймана (68), среднее значение которого на поверхности $\mathcal{F}V$ равно нулю. Все остальные решения задачи Неймана могут быть получены прибавлением к этому решению произвольной постоянной.

В отношении распространения формулы (67) на внешние смешанную задачу и задачу Неймана справедливы те же соображения, что и в отношении формулы (61): на внешние задачи для уравнения Лапласа она распространяется непосредственно, а для уравнения Пуассона — при условии регулярности решения и сходимости интеграла $\iiint\limits_V fG\,dV$. При этом внешняя задача Неймана каких-либо особенностей по сравнению с внешней смешанной задачей не имеет, так как условие (34) не распространяется на функции, гармоничные в бесконечной области.

Функция Грина имеет простой физический смысл поля, создаваемого *точечными источниками*. Поясним это на примере поля точечного электрического заряда. По закону Кулона, в свободном пространстве потенциал $u(\xi)$ поля единичного точечного заряда, расположенного в точке x, равен $\frac{1}{4\pi r}$ (в рационализированной системе единиц), где $r=|\xi-x|$. Предположим, однако, что этот заряд расположен в полости внутри заземленного проводника. При этом на границе полости будут индуцированы заряды, потенциал $\frac{1}{4\pi}\varphi$ поля которых вне полости должен скомпенсировать поле точечного заряда, поскольку потенциал заземленного проводника равен нулю. Вследствие этого, потенциал φ на границе полости должен удовлетворять граничному условию $\varphi=-\frac{1}{r}$. Отсюда ясно, что потенциал полного поля в полости $\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}+\varphi\right)$ представит *функцию Грина задачи Дирихле*, поставленной для образованной полостью области.

Коснемся вопроса о *существовании* функций Грина. Как ясно из их физической интерпретации, следует ожидать, что функции Грина существуют при весьма общих условиях. В теории дифференциальных уравнений эллиптического типа доказывается, что функции Грина существуют, если решения соответствующих граничных задач существуют и единственны. Решения этих задач представимы формулами (61) и (67) (подробнее см. § 6 дополнения к ч. 2).

Формулы (61) и (67) лежат в основе *метода Грина* решения граничных задач, с которым мы ниже встретимся.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что функция Грина задачи Дирихле, поставленной для области V, положительна внутри этой области.

Указание. Воспользоваться тем, что функция Грина положительна на поверхности достаточно малого шара с центром в ее полюсе, а на границе области V обращается в нуль, и применить теорему о максимуме и минимуме.

2. Показать, что функция Грина $G(\xi, x)$, непрерывная в области V вместе со своими первыми производными, симметрична в этой области относительно точек ξ и x, т. е.

$$G(\xi, x)=G(x, \xi).$$

Указание. Применить в области $V-\Omega_\varepsilon(\xi)-\Omega_\varepsilon(x)$, где $\Omega_\varepsilon(\xi)$ и $\Omega_\varepsilon(x)$ — сферические окрестности точек ξ, $x\in V-\mathfrak{F}V$, описанные радиусом ε, к функциям $G(\zeta, x)$, $G(\zeta, \xi)$ формулу Грина (7) гл. XVIII и перейти к пределу $\varepsilon=0$.