§ 8. Гармонические функции на плоскости

До сих пор мы рассматривали гармонические функции в пространстве. Хотя теория гармонических функций на плоскости почти аналогична теории гармонических функций в пространстве, но имеет и некоторые отличия, которые мы здесь отметим.

Для функций, гармонических в ограниченной плоской области, полностью сохраняет свою силу теорема о максимуме и минимуме, доказываемая совершенно так же, как в § 3.

Под инверсией в двумерном случае понимают преобразование, при котором точка x плоскости преобразуется в точку ξ с координатами

$$\xi_i = \frac{x_i}{|x|^2} \quad (i = 1, 2, \quad |x|^2 = x_1^2 + x_2^2). \tag{72}$$

При этом место отражения относительно шаровой поверхности занимает отражение относительно окружности.

Справедлива *теорема Кельвина*: если функция u гармонична в области S, то функция

$$v(\xi) = u(x) \equiv u\left(\frac{\xi_1}{|\xi|^2}, \frac{\xi_2}{|\xi|^2}\right) \tag{73}$$

гармонична в области S', сопряженной области S при инверсии.

Отметим отсутствие в формуле (73) множителя $|x|$ перед u, имеющегося в формуле (21). Проведение доказательства теоремы Кельвина для плоской области предоставляется читателю.

Из формулы (73) вытекает, что функция, гармоническая в бесконечной плоской области, в общем случае не обращается на бесконечности в нуль. Действительно, функция $v(\xi)$, полученная преобразованием функции $u(x)$, гармонической в ограниченной области, стремится на бесконечности к нулю только тогда, когда $u(0) = 0$. Можно однако показать, что разность $v(\xi) - u(0)$ убывает на бесконечности по абсолютной величине, как $\frac{1}{|\xi|}$, а производные гармонической функции — как $\frac{1}{|\xi|^2}$.

С помощью теоремы о максимуме и минимуме и теоремы Кельвина, теми же рассуждениями, как и в § 4, легко доказывается теорема единственности решения задач Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона.

Легко также вывести *формулу Дирихле*

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right] dS = \int\limits_{\mathcal{F}S} w \mathcal{P} w \, dl - \frac{1}{2} \int\limits_{\mathcal{F}S} \beta w^2 \, dl,$$

где w — функция, гармоническая в области S, а $\mathcal{P}w \equiv \frac{dw}{dn} + \beta w$. С ее помощью можно доказать теоремы единственности решений задач Неймана и смешанной, аналогичные теоремам § 4, с тем лишь отличием, что решение внешней задачи Неймана на плоскости определяется с точностью до постоянного слагаемого, как и решение внутренней.

Фундаментальным решением уравнения Лапласа в плоской области S называют функцию

$$L(\xi, x) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r} + \varphi(\xi, x)\right],$$

где r — расстояние между точками ξ и x, а $\varphi(\xi, x)$ — функция, гармоническая в области S по координатам точки ξ. Легко видеть, что при $\xi \neq x$ функция $\ln\frac{1}{r}$ гармонична по координатам точек ξ и x.

Опираясь на формулу Грина (9) гл. XVIII, придем к формуле

$$\int\limits_{\mathcal{F}S}\left(L\frac{du}{dn} - u\frac{dL}{dn}\right)dl_\xi =$$
$$= \iint\limits_S L\,\Delta u\,dS + \begin{cases} 0, & \text{когда } x \in R_2 - S, \\ \frac{1}{2}u(x), & \text{когда } x \in \mathcal{F}S, \\ u(x), & \text{когда } x \in S - \mathcal{F}S, \end{cases} \tag{74}$$

где S — ограниченная плоская область, а R_2 — вся плоскость, откуда, при $\Delta u = 0$, следует «основная формула» теории гармонических функций на плоскости:

$$\int\limits_{\mathcal{F}S}\left(L\frac{du}{dn} - u\frac{dL}{dn}\right)dl_\xi = \begin{cases} 0, & \text{когда } x \in R_2 - S, \\ \frac{1}{2}u(x), & \text{когда } x \in \mathcal{F}S, \\ u(x), & \text{когда } x \in S - \mathcal{F}S. \end{cases} \tag{75}$$

Если граница $\mathcal{F}S$ — окружность C единичного радиуса, то, преобразуя формулу (75), придем к интегральной формуле Пуассона для гармонической функции u на плоскости:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C u(\xi)\,\frac{1 - r_0^2}{r^2}\,dl. \tag{76}$$

Как и для случая трех измерений, легко показать, что подстановка в интегральную формулу Пуассона непрерывного граничного условия дает решение внутренней задачи Дирихле для круга. Из формулы Пуассона вытекает также *теорема о среднем значении*: среднее значение гармонической функции на окружности равно ее значению в центре окружности. Для доказательства теоремы в формуле Пуассона достаточно положить $|x| = 0$.

Положив в формуле Грина (9) гл. XVIII $v=1$, $\Delta u=0$, получим формулу

$$\int\limits_{\mathcal{F}S} \frac{du}{dn}\, dl = 0, \tag{77}$$

аналогичную формуле (34).

Распространим формулы (75) и (77) на функции, гармонические в бесконечных областях с конечной границей $\mathcal{F}S$. Пусть u — такая функция, а C — окружность радиуса a с центром в начале координат, охватывающая границу $\mathcal{F}S$. Применив формулу (75) к функции u в области S^*, заключенной между контурами $\mathcal{F}S$ и C, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathcal{F}S}\left(\frac{du}{dn}\ln\frac{1}{r} - u\frac{d}{dn}\ln\frac{1}{r}\right) dl +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C}\left(\frac{du}{dn}\ln\frac{1}{r} - u\frac{d}{dn}\ln\frac{1}{r}\right) dl = \begin{cases} 0, & \text{когда } x\in R_2 - S^*, \\ \frac{1}{2}u(x), & \text{когда } x\in \mathcal{F}S^*, \\ u(x), & \text{когда } x\in S^* - \mathcal{F}S^*. \end{cases}$$

Рассмотрим второй из интегралов левой части этого соотношения при $a\to\infty$. В силу леммы о поведении производных гармонической функции на бесконечности, при $a\to\infty$ слагаемое $\frac{du}{dn}\ln\frac{1}{r}$ стремится к нулю не медленнее, чем

$$\frac{\ln(x_1^2+x_2^2)}{x_1^2+x_2^2},$$

а поэтому интеграл $\int\limits_C \frac{du}{dn}\ln\frac{1}{r}\,dl$ на бесконечности обращается в нуль. Что же касается интеграла $-\frac{1}{2\pi}\int\limits_C u\frac{d}{dn}\ln\frac{1}{r}\,dl$, то заметив, что $\frac{d}{dn}\ln\frac{1}{r} = -\frac{1}{r}$ и что какова бы ни была точка x, при неограниченном возрастании радиуса a окружности C величина r стремится к a, заключим, что интеграл при $a\to\infty$ стремится к «среднему значению функции u на бесконечности»:

$$u_\infty \equiv \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi a}\int\limits_C u\, dl.$$

Таким образом, придем к следующей основной формуле для гармонических функций в бесконечной плоской области:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathcal{F}S}\left(\frac{du}{dn}\ln\frac{1}{r} - u\frac{d}{dn}\ln\frac{1}{r}\right) dl + u_\infty =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{когда } x\in R_2 - S, \\ \frac{1}{2}u(x), & \text{когда } x\in \mathcal{F}S. \\ u(x), & \text{когда } x\in S - \mathcal{F}S, \end{cases} \tag{78}$$

Пользуясь леммой о производных гармонической функции на бесконечности и рассматривая пределы интегралов по ограниченной области S^* при неограниченном возрастании ее внешнего контура, без труда также найдем, что

$$\int\limits_{\mathcal{F}S} \frac{du}{dn} dl = 0. \tag{79}$$

Отметим, что формулы для трех измерений, аналогичной этой формуле, нет. Таким образом, на плоскости граничное условие внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа должно удовлетворять тому же интегральному соотношению, что и условие внутренней задачи.

Читателя не затруднит также определить на плоскости *функции Грина* и построить интегральные формулы, аналогичные формулам § 7.

В заключение отметим, что теория функций комплексного переменного предоставляет исключительно сильный аппарат решения граничных задач для уравнения Лапласа на плоскости. Пусть $w(z) = u + iv$ — аналитическая функция комплексного аргумента $z = x_1 + ix_2$. Тогда функции u и v, как известно *, удовлетворяют условиям Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_1} = -\frac{\partial u}{\partial x_2}. \tag{80}$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по x_1, второе — по x_2 и складывая их, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0.$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0,$$

т. е. любая аналитическая функция комплексного переменного удовлетворяет уравнению Лапласа.

В теории функций комплексного переменного доказываются следующие два предложения **:

а) всякое аналитическое преобразование переменных x_1 и x_2 к переменным ξ_1 и ξ_2 осуществляет конформное отображение первого рода плоскости x на плоскость ξ, и наоборот, любое конформное отображение первого рода является аналитическим;

* См. В. И. Смирнов [1], т. III, ч. 2, п. 2.

** Терминологию, применяемую в теории функций комплексного переменного, мы предполагаем известной.

б) любая плоская односвязная область, отличная от полной плоскости или от плоскости с выключенной точкой, конформным отображением может быть преобразована в круг.

Так как решение внутренней задачи Дирихле для круга дается интегральной формулой Пуассона, а внешняя задача Дирихле может быть приведена к внутренней с помощью теоремы Кельвина, из сказанного заключим, что решение задач Дирихле для плоской области будет найдено, если найдено преобразование, осуществляющее конформное отображение данной области на круг, причем это последнее преобразование всегда существует.

Покажем теперь, что задача Неймана на плоскости может быть приведена к задаче Дирихле. Для этого заметим, что, в силу условий Коши—Римана, производная от вещественной части u аналитической функции w по любому направлению n равна производной мнимой части этой функции по направлению τ, перпендикулярному n.

Пусть теперь u — искомое решение задачи Неймана и

$$\frac{du}{dn} = \psi, \text{ когда } x \in \mathcal{F}S \tag{81}$$

— заданное граничное условие. Введем гармоническую функцию v, задав ее значение на контуре $\mathcal{F}S$ следующим образом:

$$v(x) = \int_y^x \psi(\xi)\, dl_\xi \qquad (x \in \mathcal{F}S),$$

где y — произвольная точка контура $\mathcal{F}S$, а интегрирование ведется вдоль этого контура. При этом, очевидно, получим

$$\frac{dv}{d\tau} = \psi, \tag{82}$$

где $\frac{dv}{d\tau}$ — производная по касательной к контуру $\mathcal{F}S$. В точках, не принадлежащих контуру $\mathcal{F}S$, функция v может быть определена как решение соответствующей задачи Дирихле.

Если мы определим функцию u через v так, чтобы в области, для которой ищется решение задачи Неймана, удовлетворялись уравнения (80), то функция u будет гармонической, а в силу соотношения (82) и сделанного выше замечания, будет иметь нормальную производную, удовлетворяющую условию (81). Эта функция и даст решение соответствующей задачи Неймана. Легко видеть, что функция u определяется указанным построением с точностью до произвольной постоянной.

Таким образом, задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа на плоскости могут быть приведены к некоторой задаче на конформное преобразование. Подробное изложение конформных преобразований читатель найдет в курсах теории функций комплексного переменного.