Глава XX

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. Ньютоновский потенциал

Исторически рано развившейся областью математической физики и важной с точки зрения физических приложений является *теория потенциала*.

По закону Ньютона потенциал поля тяготения в точке x, созданный массой m, сосредоточенной в точке ξ, равен

$$-\varkappa \frac{m}{r},$$

где $\varkappa$ — гравитационная постоянная, а r — расстояние между точками x и ξ. Если масса распределена с плотностью ρ в области V, то потенциал созданного ею поля, очевидно, должен быть определен как объемный интеграл

$$-\varkappa \iiint\limits_V \frac{\rho}{r}\, dV_\xi,$$

Выражением подобного же вида, отличающимся лишь постоянным множителем, определяется и *кулоновский потенциал* поля электрических зарядов, распределенных с плотностью ρ.

В обоих случаях потенциал поля с точностью до множителя равен интегралу

$$U(x) = \iiint\limits_V \frac{\rho}{r}\, dV_\xi, \tag{1}$$

который будем называть *ньютоновским потенциалом*.

Подчеркнем отличия между ньютоновским потенциалом (1), с одной стороны, и потенциалами полей тяготения и электрических зарядов — с другой.

При переходе к полю тяготения перед интегралом (1) должен быть введен *отрицательный* множитель, учитывающий характер взаимодействия между тяготеющими массами (притяжение). Абсолютная величина этого множителя зависит от выбора единиц измерения и поэтому для нас несущественна. Кроме того, плотность тяготеющих масс ρ, в отличие от плотности электрических зарядов, *всегда неотрицательна*. Поэтому, при рассмотрении поля тяготения мы всегда имеем дело с частным случаем ньютоновского потенциала (1).

При переходе к полю электрических зарядов перед интегралом (1) должен быть введен *положительный* множитель, так как одноименные электрические заряды *отталкиваются*. Плотность ρ может быть знакопеременной.

Таким образом, изучая ньютоновский потенциал (1), мы отвлекаемся от конкретного характера взаимодействия (притяжение или отталкивание) — наши выводы не будут зависеть от этого характера. Они всегда будут приложимы к полю электрических зарядов. К полю тяготения они будут приложимы, если соблюдено требование неотрицательности плотности ρ.

Перейдем к изучению свойств ньютоновского потенциала.

Если плотность ρ — ограниченная функция с непрерывными первыми производными, убывающая на бесконечности не медленнее, чем $\frac{1}{|\xi|^2}$, где $|\xi|^2 \equiv \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, то можно показать, что ньютоновский потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U = -4\pi\rho \tag{2}$$

и имеет непрерывные первые и вторые производные, причем первые производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла. Мы не будем приводить простое, но несколько утомительное доказательство этих утверждений, которое читатель может найти, например, в курсе В. И. Смирнова *.

Ниже мы будем рассматривать ньютоновский потенциал в точках вне области V распределения масс или зарядов, считая область V ограниченной, а плотность ρ непрерывной. Когда $x \in R_E - V$, где R_E — все пространство, подынтегральная функция в интеграле (1) непрерывна и дифференцируема по координатам точки x неограниченное число раз. Следовательно, когда $x \in R_E - V$, производные ньютоновского потенциала всех порядков могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла.

Так как функция $\frac{1}{r}$ гармонична, когда $\xi \in V$, $x \in R_E - V$, то ньютоновский потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, когда $x \in R_E - V$. При $x \to \infty$ подынтегральная функция неограниченно убывает. Поскольку область V ограничена, ньютоновский потенциал при этом стремится к нулю. Следовательно, вне области расположения масс (зарядов) *ньютоновский потенциал представляет гармоническую функцию.*

ЗАДАЧИ

1. Найти ньютоновский потенциал, создаваемый однородным диском радиуса R в точке оси диска, отстоящей от центра диска на расстояние h.

Ответ:

$$U = \frac{2m}{R^2}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right),$$

где m — полная масса диска.

2. Плотность массивного шара радиуса R меняется пропорционально квадрату расстояния от некоторой диаметральной плоскости. Найти потенциал

---

* См. В. И. Смирнов [1], т. II, п. 200—201.

в точке, лежащей на перпендикуляре, восстановленном в центре этой диаметральной плоскости, на расстоянии h от центра шара.

Ответ:

$$U=\frac{4\pi}{15}R^4\left(\frac{R}{h}+\frac{2}{7}\cdot\frac{R^3}{h^3}\right).$$

§ 2. Потенциалы разных порядков

Рассмотрим треугольник $x\xi\zeta$ (рис. 30). Введем обозначение для длин сторон треугольника:

$$r\equiv|\xi-x|,\quad r_0\equiv|\xi-\zeta|,\quad R\equiv|x-\zeta|.$$

По известной формуле

$$r=R\sqrt{1+\frac{r_0^2}{R^2}-2\frac{r_0}{R}\cos\gamma},$$

где γ — угол $x\zeta\xi$. Обозначим через Ω часть пространства, расположенную вне шара $|x-\zeta|\leqslant r_н$, где $r_н$ — наибольшее из расстояний $|\xi-\zeta|$, когда $\xi\in V$. Если $x\in\Omega$, то $r_0<R$, вследствие

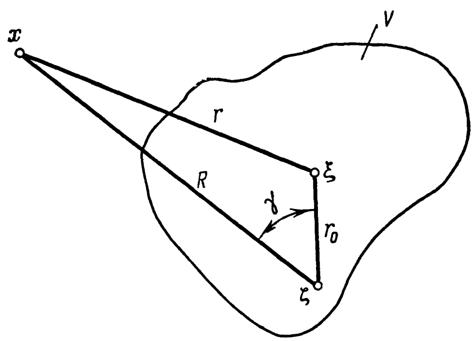

Рис. 30

чего функция $\frac{1}{r}$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\frac{r_0}{R}\right)^{\alpha}P_\alpha(\cos\gamma)\quad(x\in\Omega),\tag{3}$$

где, согласно § 5 гл. XVI, $P_\alpha(\cos\gamma)$ — полиномы Лежандра.

С другой стороны, заметив, что

$$r\equiv\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}[(x_\alpha-\zeta_\alpha)-(\xi_\alpha-\zeta_\alpha)]^2},$$