

в точке, лежащей на перпендикуляре, восстановленном в центре этой диаметральной плоскости, на расстоянии h от центра шара.

Ответ:

$$U = \frac{4\pi}{15} R^4 \left(\frac{R}{h} + \frac{2}{7} \cdot \frac{R^3}{h^3} \right).$$

§ 2. Потенциалы разных порядков

Рассмотрим треугольник $x\xi\zeta$ (рис. 30). Введем обозначение для длин сторон треугольника:

$$r \equiv |\xi - x|, \quad r_0 \equiv |\xi - \zeta|, \quad R \equiv |x - \zeta|.$$

По известной формуле

$$r = R \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{R^2} - 2 \frac{r_0}{R} \cos \gamma},$$

где γ — угол $x\xi\zeta$. Обозначим через Ω часть пространства, расположенную вне шара $|x - \zeta| \leq r_n$, где r_n — наибольшее из расстояний $|\xi - \zeta|$, когда $\xi \in V$. Если $x \in \Omega$, то $r_0 < R$, вследствие

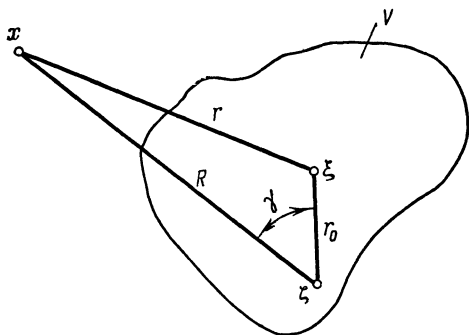


Рис. 30

чего функция $\frac{1}{r}$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R} \right)^{\alpha} P_{\alpha}(\cos \gamma) \quad (x \in \Omega), \quad (3)$$

где, согласно § 5 гл. XVI, $P_{\alpha}(\cos \gamma)$ — полиномы Лежандра.

С другой стороны, заметив, что

$$r \equiv \sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 [(x_{\alpha} - \zeta_{\alpha}) - (\xi_{\alpha} - \zeta_{\alpha})]^2},$$

разложим функцию $\frac{1}{r}$ в ряд Тейлора по степеням разностей $|\xi_j - \zeta_j|$, что даст

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \left\{ \left[\sum_{\beta=1}^3 (\xi_{\beta} - \zeta_{\beta}) \frac{\partial}{\partial \xi_{\beta}} \right]^{\alpha} \frac{1}{r} \right\}_{\xi=\zeta}.$$

Равенство $\xi = \zeta$ у фигурных скобок указывает, что после выполнения дифференцирования координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 точки ξ следует заменить координатами $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ точки ζ . Когда $x \in \Omega$, этот ряд также сходится абсолютно и равномерно. Так как

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4)$$

то дифференцирование по ξ_i можно заменить дифференцированием по x_i . При этом подстановку $\xi = \zeta$ можно осуществить до дифференцирования. В силу тождества $\frac{1}{r} \Big|_{\xi=\zeta} \equiv \frac{1}{R}$, это даст

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha}}{\alpha!} r_0^{\alpha} \left[\sum_{\beta=1}^3 \frac{\xi_{\beta} - \zeta_{\beta}}{r_0} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \right]^{\alpha} \frac{1}{R}. \quad (5)$$

Заметив, что отношения $\frac{\xi_{\beta} - \zeta_{\beta}}{r_0}$ равны направляющим косинусам отрезка $\overline{\zeta\xi}$ (см. рис. 30), вследствие чего выражение

$$\sum_{\beta=1}^3 \frac{\xi_{\beta} - \zeta_{\beta}}{r_0} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \equiv \frac{\partial}{\partial r_0}$$

означает операцию дифференцирования по направлению отрезка $\overline{\zeta\xi}$, получим

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} (-1)^{\alpha} \frac{r_0^{\alpha}}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial r_0^{\alpha}} \left(\frac{1}{R} \right) \quad (r_0 < R). \quad (6)$$

Сравнив ряды (3) и (6), придем к следующему представлению для полиномов Лежандра:

$$P_n(\cos \gamma) = (-1)^n \frac{R^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial r_0^n} \left(\frac{1}{R} \right), \quad (7)$$

из которого, в частности, следует, что произведение $R^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial r_0^n} \left(\frac{1}{R} \right)$ не зависит от R , а зависит только от угла γ .

Умножим ряды (3) и (6) на $\rho(\xi)$ и почленно проинтегрируем их (что допустимо ввиду их равномерной сходимости) по области V распределения масс. В результате получим разложение ньютоновского потенциала (1) в бесконечный ряд:

$$U(x) = U_0(x) + U_1(x) + U_2(x) + \dots \quad (x \in \Omega), \quad (8)$$

где

$$U_n(x) \equiv \frac{1}{R^{n+1}} \iiint_V \rho r_0^n P_n(\cos \gamma) dV = \\ = \frac{(-1)^n}{n!} \iiint_V \rho r_0^n \frac{\partial^n}{\partial r_0^n} \left(\frac{1}{R} \right) dV \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots). \quad (9)$$

Функции U_n называются *потенциалами порядка n* . Легко убедиться, что они гармоничны.

При достаточно большом удалении от области V ньютоновский потенциал $U(x)$ со сколь угодно высокой точностью описывается первым из потенциалов порядка n , не равным нулю. Действительно, согласно формуле (14) гл. XVI: $|P_n(\cos \gamma)| \leq 1$. Поэтому

$$\left| \iiint_V \rho r_0^n P_n(\cos \gamma) dV \right| \leq \iiint_V |\rho| r_0^n dV \leq r_n^n q^*,$$

где

$$q^* = \iiint_V |\rho| dV,$$

а r_n — наибольшее значение $r_0 \equiv |\xi - \zeta|$ в области V . Подставив эту оценку в формулу (9), получим

$$|U_n| \leq \frac{q^*}{R} \left(\frac{r_n}{R} \right)^n,$$

в силу чего

$$\sum_{\alpha=m}^{\infty} |U_\alpha| \leq \frac{q^*}{R} \sum_{\alpha=m}^{\infty} \left(\frac{r_n}{R} \right)^\alpha = \frac{q^* r_n^m}{R^{m+1}} \frac{R}{R - r_n}. \quad (10)$$

Пусть

$$U_{m-1} \equiv \frac{1}{R^m} \iiint_V \rho r_0^{m-1} P_m(\cos \gamma) dV$$

— первый из неравных тождественно нулю потенциалов. При $x \rightarrow \infty$ он стремится к нулю, как $\frac{1}{R^m}$, тогда как, согласно соотношению (10), сумма всех остальных потенциалов убывает, как $\frac{1}{R^{m+1}}$. Это и доказывает сделанное утверждение.

Для поля тяготения плотность ρ сохраняет знак. Поэтому, приняв за точку ζ *центр тяжести масс*, можно добиться, чтобы потенциал $U_1(x)$ первого порядка обратился в нуль. Следовательно, на расстоянии, большом по сравнению с поперечными размерами области распределения масс, их ньютоновский потенциал с точностью до малых третьего порядка совпадает с ньютоновским потенциалом материальной точки, расположенной в центре тяжести масс и имеющей массу, равную полной массе, распределенной в области V .

Положив в неравенстве (10) $m=0$, найдем, что ньютоновский потенциал убывает на бесконечности не медленнее, чем $\frac{1}{R}$.

ЗАДАЧА

Показать, что если плотность ρ меняет знак в области V , то выбрать точку ζ так, чтобы потенциал первого порядка обратился в нуль, вообще говоря, невозможно.

§ 3. Мультиполи

Вернемся к разложению ньютоновского потенциала в ряд (8). В силу соотношений (9), первый член ряда (8) (потенциал нулевого порядка) равен

$$U_0 \equiv \frac{1}{R} \iiint_V \rho dV.$$

Это выражение формально совпадает с потенциалом точечного заряда $q = \iiint_V \rho dV$, расположенного в точке ζ .

Оказывается,

и следующие члены ряда (8) можно рассматривать как потенциалы некоторых точечных объектов.

Рассмотрим два точечных заряда $-q$ и $+q$ ($q > 0$), расположенных соответственно в точках ζ и η (рис. 31). Потенциал поля, созданного этой парой зарядов в точке x , равен

$$U(x) = -\frac{q}{R} + \frac{q}{R_1},$$

где R и R_1 — длины отрезков $\overline{\zeta x}$ и $\overline{\zeta \eta}$. Считая, что длина r_1 отрезка $\overline{\zeta \eta}$ меньше R , разложим функцию $\frac{1}{R_1}$ в ряд вида (3), что даст

$$U(x) = \frac{q}{R} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{R}\right)^{\alpha} P_{\alpha}(\cos \gamma_1), \quad (11)$$

где γ_1 — угол между отрезками $\overline{\zeta x}$ и $\overline{\zeta \eta}$.

Перемещая точку η с зарядом $+q$ вдоль отрезка $\overline{\eta \zeta}$, будем приближать ее к точке ζ с зарядом $-q$, одновременно увеличивая абсолютную величину q зарядов так, чтобы произведение

$$p_1 \equiv q r_1 \quad (12)$$

оставалось неизменным. При этом, как легко видеть, все члены в разложении (11), кроме первого, будут стремиться к нулю.