Положив в неравенстве (10) $m=0$, найдем, что ньютоновский потенциал убывает на бесконечности не медленнее, чем $\frac{1}{R}$.

ЗАДАЧА

Показать, что если плотность ρ меняет знак в области V, то выбрать точку ζ так, чтобы потенциал первого порядка обратился в нуль, вообще говоря, невозможно.

§ 3. Мультиполи

Вернемся к разложению ньютоновского потенциала в ряд (8). В силу соотношений (9), первый член ряда (8) (потенциал нулевого порядка) равен

$$U_0 \equiv \frac{1}{R} \iiint\limits_V \rho \, dV.$$

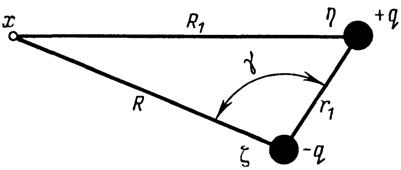

Рис. 31

Это выражение формально совпадает с потенциалом точечного заряда $q=\iiint\limits_V \rho \, dV$, расположенного в точке ζ. Оказывается, и следующие члены ряда (8) можно рассматривать как потенциалы некоторых точечных объектов.

Рассмотрим два точечных заряда $-q$ и $+q$ $(q>0)$, расположенных соответственно в точках ζ и η (рис. 31). Потенциал поля, созданного этой парой зарядов в точке x, равен

$$U(x) = -\frac{q}{R} + \frac{q}{R_1},$$

где R и R_1 — длины отрезков $\overline{\zeta x}$ и $\overline{\zeta \eta}$. Считая, что длина r_1 отрезка $\overline{\zeta \eta}$ меньше R, разложим функцию $\frac{1}{R_1}$ в ряд вида (3), что даст

$$U(x) = \frac{q}{R} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{R}\right)^{\alpha} P_{\alpha}(\cos \gamma_1), \tag{11}$$

где γ_1 — угол между отрезками $\overline{\zeta x}$ и $\overline{\zeta \eta}$.

Перемещая точку η с зарядом $+q$ вдоль отрезка $\overline{\eta \zeta}$, будем приближать ее к точке ζ с зарядом $-q$, одновременно увеличивая абсолютную величину q зарядов так, чтобы произведение

$$p_1 \equiv q r_1 \tag{12}$$

оставалось неизменным. При этом, как легко видеть, все члены в разложении (11), кроме первого, будут стремиться к нулю.

В пределе получим

$$\lim_{r_1 \to 0} U(x) = p_1 \frac{P_1(\cos\gamma)}{R^2} \equiv U^{(1)}(x). \tag{13}$$

В силу соотношения (7), можем также записать

$$U^{(1)}(x) = -p_1 \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{R}\right), \tag{14}$$

где $\frac{\partial}{\partial r_1}$ обозначает дифференцирование по направлению отрезка $\overline{\zeta\eta}$.

Точечный объект, получающийся в результате рассмотренного процесса сближения точек η и ζ, называют *диполем*. Более точно, под диполем понимают особую точку поля, характеризуемого потенциалом (13) или (14). Потенциал диполя убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, как и потенциал первого порядка в разложении (8).

Величину p_1, входящую в выражения (13) и (14), называют *моментом диполя*, а направление отрезка $\overline{\zeta\eta}$, отсчитываемое от *отрицательного* заряда к *положительному*, называют *осью диполя*.

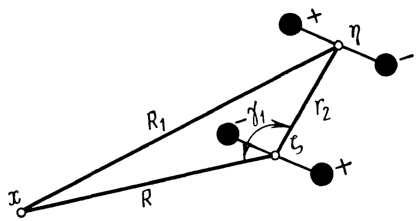

Рис. 32

Сконструируем теперь точечный объект, потенциал которого убывал бы обратно пропорционально R^3, т. е. так же, как и потенциал второго порядка в разложении (8).

Для этого в произвольной точке η поместим диполь с моментом p_1 и осью, ориентированной вдоль направления r_1, а в точке ζ поместим такой же диполь, но с осью, ориентированной вдоль направления $-r_1$ (рис. 32). В силу формулы (14), потенциал поля этой системы в точке x равен

$$U(x) = p_1\left[\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{R_1}\right)\right] = p_1 \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right).$$

Разложим функцию $\frac{1}{R_1}$ в ряд вида (5) и, приняв во внимание, что в рассматриваемом случае расстояние r_0 равно длине отрезка $\overline{\zeta\eta}$, которую мы обозначим через r_2, получим

$$U(x) = -p_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \sum_{\alpha=1}^{\infty} (-1)^\alpha \frac{r_2^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial r_2^\alpha}\left(\frac{1}{R}\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\infty} (-1)^{\alpha+1} \frac{p_1 r_2^\alpha}{\alpha!} \cdot \frac{\partial^{1+\alpha}}{\partial r_1 \, \partial r_2^\alpha}\left(\frac{1}{R}\right), \tag{15}$$

где $\frac{\partial}{\partial r_2}$ обозначает дифференцирование по направлению отрезка $\overline{\zeta\eta}$.

Сохраняя направление отрезка $\overline{\zeta\eta}$ неизменным, будем приближать точку η к точке ζ, одновременно увеличивая величину момента p_1 так, чтобы произведение

$$p_2 \equiv 2!\, p_1 r_2$$

сохраняло постоянное значение. При этом все члены ряда (15), кроме первого, будут стремиться к нулю, вследствие чего в пределе получим

$$\lim_{r_2 \to 0} U(x) = \frac{p_2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} \left(\frac{1}{R}\right) \equiv U^{(2)}(x). \tag{16}$$

Точечный объект, получаемый рассматриваемым предельным переходом, получил название *квадруполя*. Величину p_2 называют *моментом квадруполя*, а направления r_1 и r_2 — его *осями*. Потенциал квадруполя при возрастании R убывает, как и потенциал третьего порядка в разложении (8), обратно пропорционально R^3.

Сближая два квадруполя можно построить *октаполь* — точечный источник поля, характеризуемый потенциалом

$$U^{(3)}(x) = \frac{p_3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial r_1\, \partial r_2\, \partial r_3} \left(\frac{1}{R}\right).$$

Продолжая этот процесс, вообще придем к *мультиполю порядка* n или 2^n-*полю* — точечному источнику поля, характеризуемому потенциалом

$$U^{(n)}(x) = \frac{p_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial r_1\, \partial r_2 \ldots \partial r_n} \left(\frac{1}{R}\right), \tag{17}$$

где $\frac{\partial}{\partial r_k}$ $(k = 1,\ 2, \ldots, n)$, обозначает дифференцирование по направлению r_k. Направления r_k называют *осями мультиполя*, а величину p_n — его *моментом*.

По мере повышения порядка мультиполя для его характеристики требуется все большее число параметров. «Мультиполь нулевого порядка» (точечный заряд) полностью определяется одним алгебраическим числом — величиной заряда. Диполь характеризуется тремя параметрами: дипольным моментом и двумя величинами, определяющими направление его оси. Мультиполь n-го порядка характеризуется $2n+1$ параметрами: мультипольным моментом p_n и $2n$ параметрами, определяющими направление его n осей (n направлений дифференцирования в формуле (17)).

В частном случае все оси мультиполя могут совпадать, имея некоторое одинаковое направление r_0. Такой мультиполь называют *осевым*. Его потенциал

$$U_0^{(n)}(x) = \frac{p_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial r_0^n} \left(\frac{1}{R}\right).$$

Приняв во внимание соотношение (7), потенциал осевого мультиполя можно представить в виде

$$U_0^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{p_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\gamma), \tag{18}$$

где γ — угол между осью мультиполя и направлением от мультиполя к точке x.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что диполь может быть однозначно охарактеризован *вектором дипольного момента* $\mathbf{P}$, равным по величине дипольному моменту p_1 и направленным вдоль оси диполя.

Указание. Ввести косинусы углов между осью диполя и осями координат

$$\cos(\mathbf{P}, X_i) = \frac{x_i - \zeta_i}{r_0} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

и выразить потенциал диполя через скалярное произведение вектора с компонентами $p_1 \cos(\mathbf{P}, X_i)$ на единичный вектор направления от точки расположения диполя к точке, в которой определяется потенциал.

2. Показать, что два мультиполя одинакового порядка, расположенные в одной и той же точке, могут быть заменены одним мультиполем того же порядка с таким моментом и направлениями осей, что поле не изменится.

Указание. Воспользоваться тождеством

$$\frac{\partial^n}{\partial r_1\,\partial r_2,\ \ldots,\ \partial r_n} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^n}{\partial x_1^\alpha\,\partial x_2^\beta\,\partial x_3^\gamma},$$

где $a_{\alpha\beta\gamma}$ — постоянные.

3. Выразить потенциал поля точечного заряда q, расположенного в точке ξ, через потенциалы системы мультиполей различного порядка, расположенных в точке ζ.

§ 4. Разложение потенциала по мультиполям. Сферические функции

Введем сферические координаты R, θ, φ с началом в точке ζ и рассмотрим разложение (8). Как указывалось (см. замечание к формуле (7)), произведения $R^{n+1} \frac{\partial}{\partial r_0^n}\left(\frac{1}{R}\right)$ не зависят от значения R. Поэтому потенциалы

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n!} \iiint\limits_V \rho r_0^n \frac{\partial^n}{\partial r_0^n}\left(\frac{1}{R}\right) dV \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{R^{n+1}} \frac{(-1)^n}{n!} \iiint\limits_V \rho r_0^n R^{n+1} \frac{\partial}{\partial r_0^n}\left(\frac{1}{R}\right) dV \tag{19}$$

могут быть представлены как произведение двух сомножителей, из которых первый $\frac{1}{R^{n+1}}$ зависит только от R, а второй

$$Y_n(\theta, \varphi) \equiv \frac{(-1)^n}{n!} \iiint\limits_V \rho r_0^n R^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial r_0^n}\left(\frac{1}{R}\right) dV \tag{20}$$