Приняв во внимание соотношение (7), потенциал осевого мультиполя можно представить в виде

$$U_0^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{p_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\gamma), \tag{18}$$

где γ — угол между осью мультиполя и направлением от мультиполя к точке x.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что диполь может быть однозначно охарактеризован *вектором дипольного момента* **P**, равным по величине дипольному моменту p_1 и направленным вдоль оси диполя.

Указание. Ввести косинусы углов между осью диполя и осями координат

$$\cos(\mathbf{P}, X_i) = \frac{x_i - \zeta_i}{r_0} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

и выразить потенциал диполя через скалярное произведение вектора с компонентами $p_1 \cos(\mathbf{P}, X_i)$ на единичный вектор направления от точки расположения диполя к точке, в которой определяется потенциал.

2. Показать, что два мультиполя одинакового порядка, расположенные в одной и той же точке, могут быть заменены одним мультиполем того же порядка с таким моментом и направлениями осей, что поле не изменится.

Указание. Воспользоваться тождеством

$$\frac{\partial^n}{\partial r_1\, \partial r_2, \ldots, \partial r_n} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^n}{\partial x_1^{\alpha}\, \partial x_2^{\beta}\, \partial x_3^{\gamma}},$$

где $a_{\alpha\beta\gamma}$ — постоянные.

3. Выразить потенциал поля точечного заряда q, расположенного в точке ξ, через потенциалы системы мультиполей различного порядка, расположенных в точке ζ.

§ 4. Разложение потенциала по мультиполям. Сферические функции

Введем сферические координаты R, θ, φ с началом в точке ζ и рассмотрим разложение (8). Как указывалось (см. замечание к формуле (7)), произведения $R^{n+1} \dfrac{\partial}{\partial r_0^n}\left(\dfrac{1}{R}\right)$ не зависят от значения R. Поэтому потенциалы

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n!} \iiint\limits_V \rho r_0^n \frac{\partial^n}{\partial r_0^n}\left(\frac{1}{R}\right) dV \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{R^{n+1}} \frac{(-1)^n}{n!} \iiint\limits_V \rho r_0^n R^{n+1} \frac{\partial}{\partial r_0^n}\left(\frac{1}{R}\right) dV \tag{19}$$

могут быть представлены как произведение двух сомножителей, из которых первый $\dfrac{1}{R^{n+1}}$ зависит только от R, а второй

$$Y_n(\theta, \varphi) \equiv \frac{(-1)^n}{n!} \iiint\limits_V \rho r_0^n R^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial r_0^n}\left(\frac{1}{R}\right) dV \tag{20}$$

не зависит от R и поэтому может зависеть только от угловых координат θ, φ. Иначе говоря, *распределение значений потенциалов U_n на всех шаровых поверхностях $R = \text{const}$ ($x \in \Omega$) подобно.* Следовательно, любой потенциал n-го порядка может быть однозначно охарактеризован множителем $Y_n(\theta, \varphi)$, зависящим только от координат θ, φ. Этот множитель получил название *сферической функции n-го порядка.*

Так как потенциалы мультиполя гармоничны, то сферические функции непрерывны и дифференцируемы по θ и φ неограниченное число раз.

Выведем некоторые соотношения, связывающие потенциалы мультиполей и сферические функции.

Обозначив через ν_1, ν_2, ν_3 направляющие косинусы отрезка $\overline{\zeta x}$ (см. рис. 30), и заметив, что

$$\frac{\partial}{\partial r_0} = \sum_{\alpha=1}^{3} \nu_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

получим

$$\frac{\partial^n}{\partial r_0^n} = \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \nu_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^n = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} \nu_1^\alpha \nu_2^\beta \nu_3^\gamma \frac{\partial^n}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \partial x_3^\gamma}. \tag{21}$$

Подставив это выражение в соотношение (19), и приняв во внимание, что производные

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \partial x_3^\gamma}\left(\frac{1}{R}\right)$$

не зависят от координат точек области V, по которым производится интегрирование, после несложных преобразований получим

$$U_n = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{1}{n!} e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^n}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \partial x_3^\gamma}\left(\frac{1}{R}\right), \tag{22}$$

где

$$e_{\alpha\beta\gamma} \equiv (-1)^n \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} \iiint\limits_V \rho \nu_1^\alpha \nu_2^\beta \nu_3^\gamma dV. \tag{23}$$

Постоянные e_{jkl} ($j + k + l = n$) называют *моментами n-го порядка.*

Сравнив члены суммы (22) с выражениями (17), заключим, что соотношение (22) представляет сумму потенциалов мультиполей порядка n, расположенных в точке ζ и имеющих мультипольные моменты $e_{\alpha\beta\gamma}$. Легко показать, что эта сумма эквивалентна одному мультиполю, расположенному в той же точке, т. е. можно построить мультиполь n-го порядка, так выбрав его момент и направления осей, чтобы его потенциал совпадал с U_n. Действительно, представим выражение

$$L_n \equiv \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^n}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \partial x_3^\gamma}$$

в форме произведения

$$L_n = p_n \prod_{\alpha=1}^{n} \left(\sum_{\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right),$$

где p_n — постоянная *. Коэффициенты $a_{\alpha 1}$, $a_{\alpha 2}$, $a_{\alpha 3}$ можно считать удовлетворяющими условию

$$\sum_{\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}^2 = 1.$$

В самом деле, если для некоторого α это не так, то, разделив соответствующий трехчлен на $\sqrt{\sum_{\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}^2}$ и изменив соответственно значение p_n, придем к числам $a_{\alpha 1}$, $a_{\alpha 2}$, $a_{\alpha 3}$, удовлетворяющим поставленному условию. Поэтому коэффициенты $a_{\alpha 1}$, $a_{\alpha 2}$, $a_{\alpha 3}$ можно принять за направляющие косинусы некоторого направления r_α, в силу чего

$$L_n = p_n \prod_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial r_\alpha} = p_n \frac{\partial^n}{\partial r_1 \partial r_2 \ldots \partial r_n}.$$

Это и доказывает сделанное утверждение.

Таким образом, выражение (19) является потенциалом некоторого мультиполя, расположенного в точке ζ. Следовательно, ряд (8) представляет разложение ньютоновского потенциала в ряд по потенциалам мультиполей различного порядка, расположенных в точке ζ.

Умножив обе части выражения (22) на R^{n+1} и приняв во внимание формулы (19) и (20), найдем, что

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} e_{\alpha\beta\gamma} Y_{\alpha\beta\gamma}, \tag{24}$$

где

$$Y_{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{1}{n!} R^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \partial x_3^\gamma} \left(\frac{1}{R} \right) \tag{25}$$

— сферические функции специального вида. Так как моменты $e_{\alpha\beta\gamma}$ не зависят от координат R, θ, φ, из формулы (24) заключим, что любая сферическая функция n-го порядка может быть выражена линейной комбинацией сферических функций специального вида (25), число которых, как можно подсчитать, равно $1 + 2 + \ldots \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Однако не все функции $Y_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha + \beta + \gamma = n)$ являются линейно независимыми, т. е. часть из них

* Возможность такого представления доказывается непосредственно, если в последнем выражении раскрыть скобки, выполнив перемножения, и привести подобные члены. При этом окажется, что $a_{\alpha\beta}$ можно выбрать так, чтобы получившееся выражение совпало с исходным при любом p_n.

также можно представить как линейную комбинацию других функций $Y_{\alpha\beta\gamma}$ того же порядка.

Это можно предвидеть из того, что функция $\frac{Y_n}{R^{n+1}}$ представляет потенциал некоторого мультиполя порядка n. Как было показано в § 3, мультиполь порядка n полностью определяется заданием всего лишь $2n+1$ параметров. Поэтому можно ожидать, что существует не более $2n+1$ линейно независимых сферических функций порядка n.

Чтобы доказать это, заметим, что функция $\frac{1}{R}$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\frac{1}{R}=0,$$

поэтому одни частные производные от $\frac{1}{R}$ можно выразить через другие. Например, можно исключить все производные по x_3 порядка выше первого с помощью тождества

$$\frac{\partial}{\partial x_3^2}\left(\frac{1}{R}\right)=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\frac{1}{R},$$

выразив, тем самым, все функции вида (25) с $\gamma > 1$ через функции с $\gamma \leqslant 1$. Число значений, которые может принимать показатель β при данном значении γ, равно $n-\gamma+1$, причем каждой данной совокупности значений γ и β соответствует определенное значение α, так как $\alpha+\beta+\gamma=n$. Если $\gamma \leqslant 1$, то число значений, которые может принимать показатель β, равно $(n+1)+n=2n+1$, т. е. действительно, среди функций (25) не более $2n+1$ линейно независимых.

В гл. XXI будет указан метод систематического построения $2n+1$ взаимно-ортогональных (из чего будет вытекать их линейная независимость) сферических функций с данным n и доказана полнота всей системы сферических функций, построенных этим методом.

Заметим, что может возникнуть вопрос, однозначно ли определяет разложение по мультиполям (или, более обще, поле вне области V, занятой массами или зарядами) плотность ρ распределения масс (зарядов) в области V. В общем случае ответ на это может быть дан отрицательный. Это видно, например, из того, что разложение в ряд Тейлора функции трех переменных содержит, как известно, $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ линейно независимых членов порядка n, тогда как в разложении потенциала поля, как мы видели, содержится не более $2n+1$ линейно независимых членов n-го порядка. Таким образом, одно и то же поле может быть создано разными распределениями масс или зарядов. Однозначно определяются только интегралы (20), в частности, полная масса или заряд в области V.

ЗАДАЧИ

1. Найти линейно независимые сферические функции первого порядка.
2. Выразить потенциал мультиполя порядка n через сферическую функцию порядка n.

§ 5. Потенциалы простого и двойного слоя

Предположим, что на поверхности S распределена с поверхностной плотностью $\bar{\rho}(\xi)$ некоторая масса (заряд). Потенциал поля, образованного рассматриваемым распределением массы (заряда), с точностью до множителя равен интегралу

$$\bar{U}(x) \equiv \iint_S \frac{\bar{\rho}}{r} dS_\xi \quad (r \equiv |x-\xi|), \tag{26}$$

получившему название *потенциала простого слоя*. Плотность $\bar{\rho}(\xi)$ называют *плотностью простого слоя*.

Предположим теперь, что на поверхности S распределен *слой диполей* с осями, направленными вдоль внешних нормалей n к поверхности S. Дипольный момент элемента dS_ξ поверхности S положим равным $\bar{\bar{\rho}}(\xi)\, dS_\xi$. В силу формулы (14), ньютоновский потенциал поля в точке x, образованного диполями на элементе dS_ξ, равен $-\bar{\bar{\rho}}(\xi)\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)$, где r — расстояние между точками ξ и x. Отсюда ясно, что потенциал поля, образованного рассматриваемым распределением диполей, может быть охарактеризован интегралом

$$\bar{\bar{U}}(x) \equiv \iint_S \bar{\bar{\rho}} \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS_\xi, \tag{27}$$

получившим название *потенциала двойного слоя*. Функцию $\bar{\bar{\rho}}$ называют *плотностью двойного слоя*.

Плотности $\bar{\rho}$ и $\bar{\bar{\rho}}$ ниже будем считать непрерывными.

Отметим некоторые свойства интегралов (26) и (27). Если точка x не принадлежит слою, то дифференцирование по координатам точки x можно производить под знаком интеграла. Так как функция $\frac{1}{r}$ гармонична вне точек слоя (т. е. при $x \neq \xi \in S$), то потенциалы простого и двойного слоя всюду вне точек слоя удовлетворяют уравнению Лапласа. Поверхность S ниже будем считать замкнутой и ограниченной. В этом случае при $x \to \infty$ интегралы (26) и (27) имеют соответственно тот же порядок малости, что и функции $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{r^2}$, обращаясь в бесконечно удаленной точке в нуль (проведение подробных доказательств предостав-