деляются только интегралы (20), в частности, полная масса или заряд в области V.

ЗАДАЧИ

1. Найти линейно независимые сферические функции первого порядка.
2. Выразить потенциал мультиполя порядка n через сферическую функцию порядка n.

§ 5. Потенциалы простого и двойного слоя

Предположим, что на поверхности S распределена с поверхностной плотностью $\bar{\rho}(\xi)$ некоторая масса (заряд). Потенциал поля, образованного рассматриваемым распределением массы (заряда), с точностью до множителя равен интегралу

$$\bar{U}(x) \equiv \iint_S \frac{\bar{\rho}}{r} dS_\xi \quad (r \equiv |x-\xi|), \tag{26}$$

получившему название *потенциала простого слоя*. Плотность $\bar{\rho}(\xi)$ называют *плотностью простого слоя*.

Предположим теперь, что на поверхности S распределен *слой диполей* с осями, направленными вдоль внешних нормалей n к поверхности S. Дипольный момент элемента dS_ξ поверхности S положим равным $\bar{\bar{\rho}}(\xi)\,dS_\xi$. В силу формулы (14), ньютоновский потенциал поля в точке x, образованного диполями на элементе dS_ξ, равен $-\bar{\bar{\rho}}(\xi)\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)$, где r — расстояние между точками ξ и x. Отсюда ясно, что потенциал поля, образованного рассматриваемым распределением диполей, может быть охарактеризован интегралом

$$\bar{\bar{U}}(x) \equiv \iint_S \bar{\bar{\rho}} \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS_\xi, \tag{27}$$

получившим название *потенциала двойного слоя*. Функцию $\bar{\bar{\rho}}$ называют *плотностью двойного слоя*.

Плотности $\bar{\rho}$ и $\bar{\bar{\rho}}$ ниже будем считать непрерывными.

Отметим некоторые свойства интегралов (26) и (27). Если точка x не принадлежит слою, то дифференцирование по координатам точки x можно производить под знаком интеграла. Так как функция $\frac{1}{r}$ гармонична вне точек слоя (т. е. при $x \neq \xi \in S$), то потенциалы простого и двойного слоя всюду вне точек слоя удовлетворяют уравнению Лапласа. Поверхность S ниже будем считать замкнутой и ограниченной. В этом случае при $x \to \infty$ интегралы (26) и (27) имеют соответственно тот же порядок малости, что и функции $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{r^2}$, обращаясь в бесконечно удаленной точке в нуль (проведение подробных доказательств предоставляется читателю). Следовательно, потенциалы простого и двойного слоя вне точек слоя всюду гармоничны.

И наоборот, положив в формулах (44) и (45) гл. XIX $L(\xi, x)=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r}$, $\frac{\partial u}{\partial n}\equiv\bar{p}$, $-u\equiv\bar{\bar{p}}$, придем к выводу, что *всякая гармоническая функция может быть представлена* в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя.

Основную трудность представляет исследование поведения интегралов (26) и (27) в окрестности точек слоя и в самих этих точках. Для достаточно строгого проведения этого исследования необходимо сделать известные предположения относительно свойств поверхностей S, на которых располагаются рассматриваемые слои, а также о свойствах плотностей $\bar{\rho}$ и $\bar{\bar{\rho}}$.

§ 6.* Поверхности Ляпунова

А. М. Ляпунов, которому принадлежит ряд результатов в области теории потенциала, предполагал, что поверхности S, на которых располагается простой или двойной слой, удовлетворяют следующим условиям:

а) в каждой точке поверхности существует единственная нормаль;

б) можно указать столь малый радиус, что из какой бы точки ζ поверхности ни был описан этим радиусом шар, часть поверхности, попадающая внутрь шара, пересекается прямыми, параллельными нормали в точке ζ, не более, чем в одной точке;

в) угол между нормалями в двух произвольных точках поверхностей ζ и ξ не превосходит величины $A|\xi-\zeta|^{\lambda}$, где $|\xi-\zeta|$ — расстояние между этими точками, а A и λ — постоянные числа, причем $0<\lambda\leqslant 1$.

Удовлетворяющие этим условиям поверхности называют *поверхностями Ляпунова*.

Предположения § 1, гл. XVIII о свойствах граничных поверхностей обеспечивают выполнение первых двух условий Ляпунова. Выполнение первого из них для гладких поверхностей очевидно. Покажем, что выполняется второе.

Введем в произвольно выбранной точке ζ поверхности S местную систему декартовых координат, направив ось 3 вдоль внешней нормали к поверхности S в точке ζ. По предположению § 1, гл. XVIII о граничных поверхностях, внутри некоторого шара $|\xi|\leqslant a$ уравнение поверхности S можно записать в виде

$$\xi_3=f(\xi_1, \xi_2),$$

где функция f и ее производные первого порядка непрерывны внутри шара $|\xi|\leqslant a$ и обращаются в точке ζ в нуль.