ляется читателю). Следовательно, потенциалы простого и двойного слоя вне точек слоя всюду гармоничны.

И наоборот, положив в формулах (44) и (45) гл. XIX $L(\xi, x)=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r}$, $\frac{\partial u}{\partial n}\equiv\bar{\rho}$, $-u\equiv\bar{\bar{\rho}}$, придем к выводу, что *всякая гармоническая функция может быть представлена* в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя.

Основную трудность представляет исследование поведения интегралов (26) и (27) в окрестности точек слоя и в самих этих точках. Для достаточно строгого проведения этого исследования необходимо сделать известные предположения относительно свойств поверхностей S, на которых располагаются рассматриваемые слои, а также о свойствах плотностей $\bar{\rho}$ и $\bar{\bar{\rho}}$.

§ 6.* Поверхности Ляпунова

А. М. Ляпунов, которому принадлежит ряд результатов в области теории потенциала, предполагал, что поверхности S, на которых располагается простой или двойной слой, удовлетворяют следующим условиям:

а) в каждой точке поверхности существует единственная нормаль;

б) можно указать столь малый радиус, что из какой бы точки ζ поверхности ни был описан этим радиусом шар, часть поверхности, попадающая внутрь шара, пересекается прямыми, параллельными нормали в точке ζ, не более, чем в одной точке;

в) угол между нормалями в двух произвольных точках поверхностей ζ и ξ не превосходит величины $A|\xi-\zeta|^{\lambda}$, где $|\xi-\zeta|$ — расстояние между этими точками, а A и λ — постоянные числа, причем $0<\lambda\leqslant 1$.

Удовлетворяющие этим условиям поверхности называют *поверхностями Ляпунова.*

Предположения § 1, гл. XVIII о свойствах граничных поверхностей обеспечивают выполнение первых двух условий Ляпунова. Выполнение первого из них для гладких поверхностей очевидно. Покажем, что выполняется второе.

Введем в произвольно выбранной точке ζ поверхности S местную систему декартовых координат, направив ось 3 вдоль внешней нормали к поверхности S в точке ζ. По предположению § 1, гл. XVIII о граничных поверхностях, внутри некоторого шара $|\xi|\leqslant a$ уравнение поверхности S можно записать в виде

$$\xi_3=f(\xi_1,\ \xi_2),$$

где функция f и ее производные первого порядка непрерывны внутри шара $|\xi|\leqslant a$ и обращаются в точке ζ в нуль.

По известным формулам аналитической геометрии, направляющие косинусы нормали к S в точке $\xi \in S$ равны

$$\cos\gamma_1 = \frac{f_1}{\sqrt{1+f_1^2+f_2^2}}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{f_2}{\sqrt{1+f_1^2+f_2^2}}, \quad \cos\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{1+f_1^2+f_2^2}}, \tag{28}$$

где f_1 и f_2 — частные производные функции f по ξ_1 и ξ_2 в рассматриваемой точке. Заметим, что угол γ_3 равен углу между нормалями в точках ζ и ξ. Радиус a шара $|\xi| \leqslant a$ можно выбрать настолько малым, чтобы при любом выборе точки $\zeta \in S$ внутри шара было $f_1^2+f_2^2 < 1$ и, в силу этого, имело место неравенство

$$\cos\gamma_3 > C > 0. \tag{29}$$

При этом изгиб поверхности S внутри шара $|\xi| \leqslant a$ не превзойдет $\frac{\pi}{2}$ и, следовательно, любая прямая, параллельная нормали в точке ζ, пересечет часть поверхности S, лежащую внутри этого шара, не более, чем в одной точке.

Чтобы установить связь предположений § 1, гл. XVIII с третьим условием Ляпунова, из формул (28) найдем, что

$$\sin\gamma_3 = \frac{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}{\sqrt{1+f_1^2+f_2^2}}.$$

Поскольку, по предположению, производные f_1 и f_2 непрерывны, радиус a шара $|\xi| \leqslant a$ можно выбрать столь малым, чтобы $\sin\gamma_3$ при любом выборе точки ζ на S был бы меньше любого наперед заданного числа. Так как при малых γ_3 имеет место неравенство $0 < \frac{\sin\gamma_3}{\gamma_3} \leqslant 1$, то можно найти такую положительную постоянную A_1, чтобы внутри шара $|\xi| \leqslant a$ выполнялось неравенство

$$\gamma_3 < A_1\sqrt{f_1^2+f_2^2}.$$

Если производные f_1 и f_2, кроме условий § 1, гл. XVIII, внутри шара $|\xi| \leqslant a$ удовлетворяют еще и *условию Гёльдера:*

$$\frac{|f_i(\xi_1, \xi_2) - f_i(0, 0)|}{|\xi|^\lambda} < A_2 \quad (i = 1, 2), \tag{30}$$

где A_2 — ограниченное положительное число, причем *показатель* λ удовлетворяет неравенству $0 < \lambda \leqslant 1$, то приняв во внимание, что $f_i(0, 0) = 0$, придем к неравенству

$$\gamma_3 < A|\xi|^\lambda. \tag{31}$$

Таким образом, если первые производные функции f удовлетворяют условию Гёльдера, причем $0 < \lambda \leqslant 1$, то третье условие Ляпунова выполняется внутри шара $|\xi| \leqslant a$. Но оно при этом удовлетворяется и для всей поверхности S. Действительно, пусть ζ и ξ —

две произвольные точки на поверхности S и ψ — угол между нормалями в этих точках. Соединим точки ζ и ξ линией, лежащей целиком на поверхности S. Эту линию разобьем на участки 1, 2, ..., α, ..., n точками, отстоящими друг от друга не более чем на расстояние a, при котором для двух соседних точек выполняются неравенства вида (31). Обозначив через $\gamma_{3\alpha}$ угол между нормалями на концах участка с номером α и через $|\xi|_\alpha$ — расстояние между концами участка, можем записать очевидные неравенства:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \gamma_{3\alpha} \geqslant \psi, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} |\xi|_\alpha^\lambda \geqslant |\zeta-\xi|^\lambda, \text{ когда } 0<\lambda\leqslant 1,$$

откуда, с учетом неравенств вида (31) для каждого из участков α, и вытекает справедливость третьего условия Ляпунова.

Таким образом, чтобы удовлетворить третьему условию Ляпунова, к предположениям § 1, гл. XVIII надо добавить предположение, что первые производные удовлетворяют условию Гёльдера (30), причем $0<\lambda\leqslant 1$. Это предположение ниже будем считать выполненным.

Найдем некоторые неравенства, следующие из выполнения условия Гёльдера для производных f_1 и f_2.

Из формул (28) вытекает, что надлежаще выбрав числа $a>0$ и $A>0$, можно добиться выполнения неравенств

$$|\cos\gamma_1|<A|\xi-\zeta|^\lambda, \quad |\cos\gamma_2|<A|\xi-\zeta|^\lambda, \text{ когда } |\xi-\zeta|<a. \tag{32}$$

Заметив, что по формуле конечных приращений

$$\xi_3=f(\xi_1, \xi_2)=f_1(\theta\xi_1, \theta\xi_2)\xi_1+f_2(\theta\xi_1, \theta\xi_2)\xi_2, \tag{33}$$

где θ — число, лежащее между нулем и единицей, и приняв во внимание очевидные неравенства $|\xi_1|\leqslant|\xi|$, $|\xi_2|\leqslant|\xi|$, при надлежаще выбранных числах $a>0$ и $A>0$ придем к неравенству

$$|\xi_3|<A|\xi|^{1+\lambda}. \tag{34}$$

ЗАДАЧА

Пусть S — незамкнутая двусторонняя поверхность, удовлетворяющая условиям Ляпунова. Телесные углы, под которыми видны участки одной из сторон поверхности, будем считать положительными, а телесные углы, под которыми видны участки другой стороны, — отрицательными. Доказать, что

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS_\varepsilon=-\omega \quad (r\equiv|x-\varepsilon|),$$

где ω — телесный угол, под которым поверхность S видна из точки x.