§ 7.* Сходимость и непрерывная зависимость несобственных интегралов от параметров

Пусть $F(\xi, x)$ — функция координат точки ξ поверхности Ляпунова S, параметрически зависящая от координат некоторой точки x. Предположим, что при $\xi \neq x$ функция $F(\xi, x)$ непрерывна, а в некоторой окрестности точки $\xi = x$ удовлетворяет неравенству

$$|F(\xi, x)| \leqslant \frac{B}{r^{2-\lambda}},$$

где $r \equiv |\xi - x|$ — расстояние между точками ξ и x, а λ и B — положительные постоянные. Докажем, что при этом условии интеграл

$$\iint_S F(\xi, x)\, dS_\xi$$

абсолютно сходится. Достаточно доказать, что сходится интеграл

$$\iint_S \frac{dS}{r^{2-\lambda}}, \tag{35}$$

из чего, очевидно, и будет следовать абсолютная сходимость рассматриваемого интеграла.

Если точка x не лежит на поверхности S, то интеграл (35) — собственный и, следовательно, существует и конечен. Если же $x = \zeta$, где ζ — точка на S, введем систему координат с началом в точке ζ, направив ось 3 вдоль нормали к поверхности S в точке ζ. Как мы видели, на участке s поверхности S, лежащем внутри шара $|\xi| \leqslant a$ достаточно малого радиуса a, имеет место неравенство (29): $\cos\gamma_3 > C > 0$, где γ_3 — угол между нормалями в точках ζ и $\xi \in s$. Вследствие этого, на участке s

$$dS_\xi = \frac{d\xi_1\, d\xi_2}{\cos\gamma_3} < \frac{1}{C}\, d\xi_1\, d\xi_2.$$

Поэтому

$$\iint_S \frac{dS}{r^{2-\lambda}} \leqslant \frac{1}{C} \iint_S \frac{d\xi_1\, d\xi_2}{r^{2-\lambda}}.$$

При $\lambda > 0$ интеграл в правой части сходится по известному признаку сходимости*, следовательно, сходится и интеграл в левой части. Сходимость интеграла (35) вытекает теперь из того, что соответствующий интеграл по $(S - s)$ — собственный и поэтому ограничен. Тем самым, наше утверждение доказано.

Предположим теперь, что x — точка некоторой области G, пересекающейся с поверхностью Ляпунова S. Область G может иметь произвольное число измерений.

Говорят, что интеграл $\iint_S F(\xi, x)\, dS_\xi$ по ограниченной поверхности S *сходится равномерно* в точке $x = \zeta \in S$, если для всякого

---

* См. В. И. Смирнов [1], т. II, п. 86.

числа $\varepsilon > 0$ можно указать такие окрестности $m(\varepsilon) \in G$ и $s(\varepsilon) \in S$ точки ζ, что

$$\iint\limits_{s(\varepsilon)} |F(\xi, x)| dS_\xi < \varepsilon, \quad \text{когда} \quad x \in m(\varepsilon).$$

Покажем, что интеграл $\iint\limits_S F(\xi, x)\, dS_\xi$, равномерно сходящийся в точке $x = \zeta$, представляет функцию от x, непрерывную в этой точке. Иными словами, докажем существование такой принадлежащей области G достаточно малой окрестности $m_1(\varepsilon)$ точки ζ, что при $x \in m_1(\varepsilon)$ разность

$$\iint\limits_S F(\xi, x)\, dS_\xi - \iint\limits_S F(\xi, \zeta)\, dS_\xi$$

по абсолютной величине не превзойдет произвольного сколь угодно малого положительного числа.

Воспользуемся неравенством

$$\left| \iint\limits_S F(\xi, x)\, dS_\xi - \iint\limits_S F(\xi, \zeta)\, dS_\xi \right| \leqslant \left| \iint\limits_{S - s(\varepsilon)} F(\xi, x)\, dS_\xi - \right.$$
$$\left. - \iint\limits_{S - s(\varepsilon)} F(\xi, \zeta)\, dS_\xi \right| + \iint\limits_{s(\varepsilon)} |F(\xi, x)|\, dS_\xi + \iint\limits_{s(\varepsilon)} |F(\xi, \zeta)|\, dS_\xi,$$

В силу предположения о равномерной сходимости рассматриваемого интеграла, окрестность $s(\varepsilon) \in S$ точки ζ можно выбрать настолько малой и указать такую окрестность $m(\varepsilon) \in G$ точки ζ, чтобы последние два интеграла в правой части неравенства не превосходили сколь угодно малого положительного числа ε. Далее, ввиду непрерывности функции $F(\xi, x)$ при $\xi \neq x$, можно найти такую окрестность $m_1(\varepsilon)$ точки ζ, являющуюся частью окрестности $m(\varepsilon) \in G$, чтобы при $x \in m_1(\varepsilon)$ и $\xi \in S - s(\varepsilon)$ соблюдалось неравенство

$$|F(\xi, x) - F(\xi, \zeta)| < \frac{\varepsilon}{\bar{S}},$$

где $\bar{S}$ — площадь поверхности S. Из неравенства

$$\left| \iint\limits_{S - s(\varepsilon)} [F(\xi, x) - F(\xi, \zeta)]\, dS_\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant \iint\limits_{S - s(\varepsilon)} |F(\xi, x) - F(\xi, \zeta)|\, dS_\xi \leqslant |F(\xi, x) - F(\xi, \zeta| \bar{S}$$

следует, что при этом первый член правой части исходного неравенства не превзойдет ε. Приняв во внимание полученные оценки, найдем, что при $x \in m_1(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\left| \iint_S F(\xi, x)\, dS_\xi - \iint_S F(\xi, \zeta)\, dS_\xi \right| < 3\varepsilon.$$

Ввиду произвольности числа ε отсюда вытекает доказываемое утверждение.

Докажем теперь следующий *достаточный признак непрерывности*: интеграл $\iint_S F(\xi, x)\, dS_\xi$ является непрерывной функцией x в точке ζ, принадлежащей поверхности S, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность $n(\varepsilon)$ точки ζ, что

$$|F(\xi, x)| < \frac{B}{|\xi - x|^{2-\lambda}}, \tag{36}$$

где В и λ — положительные числа, а $|\xi - x|$ — расстояние между точками ξ и x.

По доказанному выше, из неравенства (36) следует абсолютная сходимость рассматриваемого интеграла. Следовательно, каково бы ни было положительное число ε, можно найти такую окрестность $s(\varepsilon) \in S$ точки ζ, чтобы при всех x было

$$\iint_{s(\varepsilon)} |F(\xi, x)|\, dS_\xi < \varepsilon.$$

Тем самым выполнено условие равномерной сходимости интеграла $\iint_S F(\xi, x)\, dS_\xi$ в точке $x = \zeta$. Но из равномерной сходимости вытекает его непрерывность в точке $x = \zeta$, что и утверждалось.

§ 8*. Поведение потенциала простого слоя и его нормальных производных при пересечении слоя

Применив только что доказанный признак непрерывности несобственных интегралов к потенциалу

$$\bar{U}(x) = \iint_S \frac{\bar{\rho}}{r}\, dS_\xi$$

простого слоя, убедимся, что этот потенциал непрерывен во всех точках слоя, а следовательно и во всем пространстве.

Найдем производную потенциала $\bar{U}(x)$ по произвольному направлению ν. Формально дифференцируя $\frac{1}{r}$ под знаком интеграла, получим

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \nu} = \iint_S \bar{\rho}\, \frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{r}\right) dS_\xi = \iint_S \frac{\bar{\rho}}{r^2} \cos\varphi\, dS_\xi, \tag{37}$$