найдем, что при $x \in m_1(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\left| \iint\limits_S F(\xi, x)\, dS_\xi - \iint\limits_S F(\xi, \zeta)\, dS_\xi \right| < 3\varepsilon.$$

Ввиду произвольности числа ε отсюда вытекает доказываемое утверждение.

Докажем теперь следующий *достаточный признак непрерывности*: интеграл $\iint\limits_S F(\xi, x)\, dS_\xi$ является непрерывной функцией x в точке ζ, принадлежащей поверхности S, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность $n(\varepsilon)$ точки ζ, что

$$|F(\xi, x)| < \frac{B}{|\xi - x|^{2-\lambda}}, \tag{36}$$

где B и λ — положительные числа, а $|\xi - x|$ — расстояние между точками ξ и x.

По доказанному выше, из неравенства (36) следует абсолютная сходимость рассматриваемого интеграла. Следовательно, каково бы ни было положительное число ε, можно найти такую окрестность $s(\varepsilon) \in S$ точки ζ, чтобы при всех x было

$$\iint\limits_{s(\varepsilon)} |F(\xi, x)|\, dS_\xi < \varepsilon.$$

Тем самым выполнено условие равномерной сходимости интеграла $\iint\limits_S F(\xi, x)\, dS_\xi$ в точке $x = \zeta$. Но из равномерной сходимости вытекает его непрерывность в точке $x = \zeta$, что и утверждалось.

§ 8*. Поведение потенциала простого слоя и его нормальных производных при пересечении слоя

Применив только что доказанный признак непрерывности несобственных интегралов к потенциалу

$$\bar{U}(x) = \iint\limits_S \frac{\bar{\rho}}{r}\, dS_\xi$$

простого слоя, убедимся, что этот потенциал непрерывен во всех точках слоя, а следовательно и во всем пространстве.

Найдем производную потенциала $\bar{U}(x)$ по произвольному направлению ν. Формально дифференцируя $\frac{1}{r}$ под знаком интеграла, получим

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \nu} = \iint\limits_S \bar{\rho}\, \frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{r}\right) dS_\xi = \iint\limits_S \frac{\bar{\rho}}{r^2} \cos\varphi\, dS_\xi, \tag{37}$$

где φ — угол между направлением ν и отрезком $\overline{\xi x}$. При всех x, не лежащих на поверхности S, подынтегральное выражение непрерывно. Поэтому для указанных значений x дифференцирование под знаком интеграла законно и дает соответствующую производную потенциала простого слоя.

Поведение интеграла (37) при приближении точки x к поверхности S изучим сначала в предположении, что точка x приближается к точке $\zeta \in S$ перемещаясь по нормали n, восстановленной в точке ζ.

Обозначим через

$$\frac{d\overline{U}(\zeta)}{dn_e}, \quad \frac{d\overline{U}(\zeta)}{dn_i}$$

предельные значения производных от $\overline{U}(x)$ по направлению упомянутой нормали при приближении точки x к ζ соответственно извне S и изнутри S. Через

$$\frac{d\overline{U}(\zeta)}{dn_0}$$

обозначим значение интеграла (37) в точке $x=\zeta$. Величины $\frac{d\overline{U}(\zeta)}{dn_e}$ и $\frac{dU(\zeta)}{dn_i}$ называют соответственно *внешней* и *внутренней* нормальной производной потенциала простого слоя в точке ζ, а величину $\frac{d\overline{U}(\zeta)}{dn_0}$ — *прямым* значением нормальной производной в этой же точке.

Докажем, что внешняя и внутренняя нормальные производные, а также прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя существуют, однозначно определены и связаны между собой соотношениями:

$$\frac{d\overline{U}(\zeta)}{dn_e}=\frac{d\overline{U}(\zeta)}{dn_0}-2\pi\overline{\rho}(\zeta), \tag{38}$$
$$\frac{d\overline{U}(\zeta)}{dn_i}=\frac{d\overline{U}(\zeta)}{dn_0}+2\pi\overline{\rho}(\zeta).$$

Составим разность

$$\iint\limits_S \overline{\rho}\,\frac{d}{dn_0}\left(\frac{1}{r}\right)dS_\xi-\overline{\rho_0}\iint\limits_S \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS_\xi\equiv$$
$$\equiv\iint\limits_S \overline{\rho}\left(\frac{d}{dn_0}-\frac{d}{dn}\right)\frac{1}{r}\,dS_\xi+\iint\limits_S (\overline{\rho}-\overline{\rho}_0)\,\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS_\xi, \tag{39}$$

где $\frac{d}{dn_0}$ обозначает дифференцирование по направлению внешней нормали к S в точке ζ, $\frac{d}{dn}$ — дифференцирование по направлению внешней нормали в переменной точке ξ поверхности S, $\bar{\rho}=\bar{\rho}(\xi)$, $\bar{\rho}_0\equiv\equiv\bar{\rho}(\zeta)$. Докажем, что разность (39) непрерывна в точке ζ. Отсюда будет вытекать, что интересующий нас интеграл $\iint\limits_S \bar{\rho}\,\frac{d}{dn_0}\left(\frac{1}{r}\right)\,dS_\xi$ испытывает те же разрывы, что и функция $\bar{\rho}_0\iint\limits_S \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS$.

Дифференцируя $\frac{1}{r}$ по направлениям нормалей n_0 и n, получим

$$\frac{d}{dn_0}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\cos\alpha,\qquad \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\cos\beta, \tag{40}$$

где α и β — углы между отрезком $\overline{\xi x}$ и направлениями нормалей n_0 и n соответственно (рис. 33). Отсюда

$$\left(\frac{d}{dn_0}-\frac{d}{dn}\right)\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}(\cos\alpha-\cos\beta)=\frac{2}{r^2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{41}$$

Рассмотрим трехгранный телесный угол с вершиной в точке ξ образованный лучами n_0, n и отрезком $\overline{\xi x}$. По известному свойству трехгранных углов

$$|\alpha-\beta|\leqslant|\psi|, \tag{42}$$

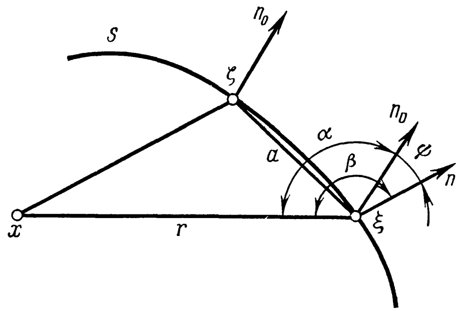

Рис. 33

где ψ — угол между лучами n_0 и n (знак равенства достигается, когда лучи n, n_0 и отрезок $\overline{\xi x}$ лежат в одной плоскости). Но по свойству в) поверхностей Ляпунова

$$\psi\leqslant A\,|\xi-\zeta|^\lambda,$$

где $A>0$, $0<\lambda\leqslant 1$. Сопоставив это неравенство с соотношениями (41) и (42), заключим, что можно найти такое постоянное число A^*, чтобы было

$$\left|\left(\frac{d}{dn_0}-\frac{d}{dn}\right)\frac{1}{r}\right|\leqslant A^*\frac{|\xi-\zeta|^\lambda}{r^2}=A^*\frac{1}{r^{2-\lambda}}\left(\frac{|\xi-\zeta|}{|x-\xi|}\right)^\lambda. \tag{43}$$

Покажем, что отношение $\frac{|\xi-\zeta|}{|x-\xi|}$ при $x\to\zeta$ остается ограниченным при всех ξ. Введем местную систему координат с началом в точке ζ, направив ось 3 вдоль нормали n_0. Так как точка x лежит на оси 3, то

$$|x-\xi|\geqslant\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}=\sqrt{|\xi|^2-\xi_3^2}.$$

Заметив, что $|\xi-\zeta|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$, получим

$$\frac{|\xi-\zeta|}{|x-\xi|}\leqslant\sqrt{1+\frac{\xi_3^2}{|\xi|^2-\xi_3^2}}.$$

Но согласно формуле (34) $\xi_3^2<A^2|\xi|^{2(1+\lambda)}$, где $\lambda>0$. Поэтому

$$\frac{|\xi-\zeta|}{|x-\xi|}<\sqrt{1+\frac{\xi_3^2}{|\xi|^2(1-|\xi|^{2\lambda})}}<\sqrt{1+\frac{1}{1-|\xi|^2}}.$$

Правая часть этого неравенства при достаточно малом $|\xi|$ сколь угодно близка к $\sqrt{2}$, из чего и вытекает требуемое утверждение. В силу неравенства (43) теперь заключим, что существует такое ограниченное положительное число B, что

$$\left|\left(\frac{d}{dn_0}-\frac{d}{dn}\right)\frac{1}{r}\right|<\frac{B}{r^{2-\lambda}},$$

а отсюда, на основании признака непрерывности несобственных интегралов (§ 7), следует, что первый из интегралов в правой части соотношения (39) непрерывен в точке ζ.

Перейдем ко второму интегралу в правой части этого соотношения. Начало координат опять поместим в точке ζ. Пусть s — участок поверхности S, лежащий внутри шара $|\xi|\leqslant a$ достаточно малого радиуса. Легко найдем, что

$$\left|\iint_s(\bar\rho-\bar\rho_0)\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS\right|\leqslant\iint_s\left|(\bar\rho-\bar\rho_0)\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right|dS\leqslant$$

$$\leqslant|\bar\rho-\bar\rho_0|_s\iint_s\left|\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right|dS=|\bar\rho-\bar\rho_0|_s\iint_s\frac{|\cos\varphi|}{r^2}dS, \tag{44}$$

где φ — угол между нормалью n в точке $\xi\in s$ и отрезком $\overline{\xi x}$, а $|\bar\rho-\bar\rho_0|_s$ — наибольшее значение $|\bar\rho-\bar\rho_0|$ на s. Когда $x=\zeta$, то
$|\cos\varphi|=\left|\frac{\xi_1}{r}\cos\gamma_1+\frac{\xi_2}{r}\cos\gamma_2+\frac{\xi_3}{r}\cos\gamma_3\right|\leqslant|\cos\gamma_1|+|\cos\gamma_2|+\frac{|\xi_3|}{|\xi|}$,
где $\cos\gamma_1$, $\cos\gamma_2$, $\cos\gamma_3$ — направляющие косинусы нормали n. Приняв во внимание неравенства (32) и (34), найдем, что $|\cos\varphi|<3A|\xi|^\lambda$, а поэтому

$$\frac{|\cos\varphi|}{r^2}<\frac{3A}{|\xi|^{2-\lambda}}.$$

Отсюда, на основании признака сходимости, доказанного в § 7, следует, что интеграл $\iint_s\frac{|\cos\varphi|}{r^2}dS$ ограничен, когда $x=\zeta$. Когда же $x\neq\zeta$, этот интеграл ограничен, так как ограничено подынтегральное выражение. Следовательно, путем выбора радиуса a шара $|\xi|<a$ величину $|\bar\rho-\bar\rho_0|_s$ можно сделать настолько малой,

чтобы правая часть неравенства (44) была меньше произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ при любом положении точки x внутри шара $|\xi| \leqslant \varepsilon$. Отсюда заключим, что существуют такие окрестности точки ζ: $s(\varepsilon)$, принадлежащая поверхности S и $m(\varepsilon)$, принадлежащая шару $|\xi| \leqslant a$, что

$$\iint\limits_{s(\varepsilon)} \left| (\bar{\rho} - \bar{\rho}_0) \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} \right) \right| dS < \varepsilon, \text{ когда } x \in m(\varepsilon).$$

При этом функция $(\bar{\rho} - \bar{\rho}_0) \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} \right)$ непрерывна на $[S - s(\varepsilon)]$. Отсюда следует, что второй из интегралов в правой части (39) сходится равномерно, а поэтому и непрерывен в точке ζ.

Таким образом, разность (39) является непрерывной функцией точки $x \in n$, вследствие чего интегралы

$$\iint\limits_{S} \bar{\rho} \frac{d}{dn_0} \left(\frac{1}{r} \right) dS \text{ и } \rho_0 \iint\limits_{S} \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} \right) dS$$

при пересечении точкой x поверхности S изменяют свое значение на одну и ту же величину.

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся основной формулой теории гармонических функций (44) гл. XIX. Положив в ней $u = 1$, $L(\xi, x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}$, $\mathcal{F}V = S$, получим *формулу Гаусса*

$$\iint\limits_{S} \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \begin{cases} -4\pi, & \text{когда } x \text{ внутри } S, \\ -2\pi, & \text{когда } x \text{ на } S, \\ \quad 0, & \text{когда } x \text{ вне } S, \end{cases} \tag{45}$$

из которой непосредственно вытекают формулы (38).

ЗАДАЧА

Доказать, что прямое значение производной потенциала простого слоя на S является функцией, непрерывной на S.

§ 9*. Тангенциальные производные потенциала простого слоя и производные по любому направлению

Предположим, что направление τ параллельно касательной плоскости к поверхности Ляпунова S в точке ζ, а n_0 — нормаль к S в этой же точке. Пусть точка x, перемещаясь по нормали n_0 в одном направлении, приближается к S. Предел интеграла

$$\frac{d\bar{U}}{d\tau} \equiv \iint\limits_{S} \bar{\rho} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{r} \right) dS \tag{46}$$