чтобы правая часть неравенства (44) была меньше произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ при любом положении точки $x$ внутри шара $|\xi| \leqslant \varepsilon$. Отсюда заключим, что существуют такие окрестности точки $\zeta$: $s(\varepsilon)$, принадлежащая поверхности $S$ и $m(\varepsilon)$, принадлежащая шару $|\xi| \leqslant a$, что

$$\iint\limits_{s(\varepsilon)} \left|(\bar{\rho} - \bar{\rho}_0) \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right| dS < \varepsilon, \text{ когда } x \in m(\varepsilon).$$

При этом функция $(\bar{\rho} - \bar{\rho}_0)\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)$ непрерывна на $[S - s(\varepsilon)]$. Отсюда следует, что второй из интегралов в правой части (39) сходится равномерно, а поэтому и непрерывен в точке $\zeta$.

Таким образом, разность (39) является непрерывной функцией точки $x \in n$, вследствие чего интегралы

$$\iint\limits_S \bar{\rho} \frac{d}{dn_0}\left(\frac{1}{r}\right) dS \text{ и } \rho_0 \iint\limits_S \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS$$

при пересечении точкой $x$ поверхности $S$ изменяют свое значение на одну и ту же величину.

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся основной формулой теории гармонических функций (44) гл. XIX. Положив в ней $u = 1$, $L(\xi, x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$, $\mathcal{F}V = S$, получим *формулу Гаусса*

$$\iint\limits_S \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \begin{cases} -4\pi, & \text{когда } x \text{ внутри } S, \\ -2\pi, & \text{когда } x \text{ на } S, \\ 0, & \text{когда } x \text{ вне } S, \end{cases} \tag{45}$$

из которой непосредственно вытекают формулы (38).

### ЗАДАЧА

Доказать, что прямое значение производной потенциала простого слоя на $S$ является функцией, непрерывной на $S$.

## § 9*. Тангенциальные производные потенциала простого слоя и производные по любому направлению

Предположим, что направление $\tau$ параллельно касательной плоскости к поверхности Ляпунова $S$ в точке $\zeta$, а $n_0$ — нормаль к $S$ в этой же точке. Пусть точка $x$, перемещаясь по нормали $n_0$ в одном направлении, приближается к $S$. Предел интеграла

$$\frac{d\bar{U}}{d\tau} \equiv \iint\limits_S \bar{\rho} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{r}\right) dS \tag{46}$$

при $x \to \zeta$ назовем *тангенциальной производной* потенциала простого слоя в точке $\zeta$. Если точка $x$ приближается к поверхности $S$ с ее внутренней стороны, то эту производную называют *внутренней*, в противном случае производную называют *внешней*.

Приведем некоторые результаты, относящиеся к свойствам тангенциальных производных, без доказательств, которые читатель может найти, например, в [3], гл. XIX, § 9.

Внутренняя и внешняя тангенциальные производные потенциала простого слоя существуют или не существуют одновременно. Для доказательства же их существования, кроме предположения о непрерывности плотности $\bar{\rho}$, надо сделать дополнительные предположения о ее поведении в окрестности точки $\zeta$. Эти предположения могут быть различными и являются достаточными. Необходимость какого-либо из них не доказана.

Если плотность простого слоя в окрестности точки $\zeta$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$\frac{|\bar{\rho}(\zeta)-\bar{\rho}(\eta)|}{|\zeta-\eta|^{\lambda_1}} < A_1, \tag{47}$$

где $A_1$ и $\lambda_1$ — положительные постоянные, а $\zeta$ и $\eta$ — две произвольные точки рассматриваемой окрестности, то внешняя и внутренняя тангенциальные производные в точке $\zeta$ совпадают и являются непрерывными функциями от $\zeta$ на поверхности $S$.

В точке $x=\zeta$ интеграл (46) сходится условно. Иначе говоря, значение интеграла (46), рассматриваемого как предел

$$\lim_{s \to 0} \iint\limits_{S-s} \bar{\rho} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{r}\right) dS$$

($s$ — окрестность точки $\zeta$), зависит от способа, которым $s \to 0$. Поэтому определенного *прямого* значения тангенциальной производной не существует, хотя существуют определенные внешняя и внутренняя тангенциальные производные, равные между собой. Иными словами, интеграл (46) при пересечении точкой $x$ поверхности $S$ испытывает *устранимый разрыв*.

Если точка $x$ приближается к поверхности $S$, оставаясь внутри $S$, и в каждом ее положении определяется производная $\frac{\partial \bar{U}}{\partial l}$ по некоторому неизменному направлению $l$, то предел $\frac{\partial \bar{U}}{\partial l_i}$ производной $\frac{\partial \bar{U}}{\partial l}$ называется *внутренней производной по направлению* $l$ в точке поверхности. Аналогично определяется *внешняя производная* $\frac{\partial U}{\partial l_e}$ *по направлению* $l$ в точке поверхности.

Если плотность простого слоя, расположенного на поверхности Ляпунова $S$, удовлетворяет условию Гёльдера (47), то при приближении к поверхности $S$ производные потенциала простого слоя по произвольному фиксированному направлению стремятся к определенным пределам, не зависящим от пути, по которому производится приближение, но, возможно, различным при приближении извне или изнутри поверхности $S$.

Справедлива формула

$$\frac{\partial \bar{U}(\zeta)}{\partial l_i} - \frac{\partial \bar{U}(\zeta)}{\partial l_l} = 4\pi\bar{\rho}(\zeta)\cos(n,\ l). \quad (48)$$

## § 10. Поведение потенциала двойного слоя при пересечении слоя

Пусть $\zeta$ — произвольная фиксированная точка двойного слоя, расположенного на поверхности Ляпунова $S$, и $\bar{\bar{\rho}}_0 = \bar{\bar{\rho}}(\zeta)$ — его плотность в точке $\zeta$. Рассмотрим разность

$$\bar{\bar{\rho}}_0 \iint\limits_S \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS - \iint\limits_S \bar{\bar{\rho}} \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \iint\limits_S (\bar{\bar{\rho}}_0 - \bar{\bar{\rho}}) \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS, \quad (49)$$

когда точка $x$ совпадает с точкой $\zeta$. Предположим, что плотность слоя $\bar{\bar{\rho}}$ непрерывна. Тогда интеграл в правой части заведомо непрерывен. Действительно, пусть $s$ — некоторая принадлежащая $S$ окрестность точки $\zeta$. При этом

$$\left| \iint\limits_s (\bar{\bar{\rho}}_0 - \bar{\bar{\rho}}) \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS \right| \leqslant |\bar{\bar{\rho}}_0 - \bar{\bar{\rho}}|_s \iint\limits_s \left| \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) \right| dS,$$

где $|\bar{\bar{\rho}}_0 - \bar{\bar{\rho}}|_s$ — наибольшее абсолютное значение разности $\bar{\bar{\rho}}_0 - \bar{\bar{\rho}}$ на $s$. Как мы видели в § 8, интеграл в правой части этого неравенства ограничен. Поэтому, в силу предположения о непрерывности функции $\bar{\bar{\rho}}$, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, окрестность $s(\varepsilon)$ всегда можно выбрать настолько малой, чтобы было

$$\left| \iint\limits_{s(\varepsilon)} (\bar{\bar{\rho}}_0 - \bar{\bar{\rho}}) \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS \right| < \varepsilon.$$

Поскольку на границах окрестности $s(\varepsilon)$ функция $(\bar{\bar{\rho}}_0 - \bar{\bar{\rho}}) \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)$ непрерывна, то рассматриваемый интеграл равномерно сходится в точке $\zeta$, а поэтому непрерывен в ней. Следовательно, разрывы, которые могут испытывать интегралы в левой части равенства (27) при пересечении точкой $x$ слоя, должны быть одинаковы. Приняв во внимание формулу Гаусса (45), придем к выводу, что потенциал двойного слоя при приближении к произвольной точке $\zeta$ слоя