ближении к поверхности S производные потенциала простого слоя по произвольному фиксированному направлению стремятся к определенным пределам, не зависящим от пути, по которому производится приближение, но, возможно, различным при приближении извне или изнутри поверхности S.

Справедлива формула

$$\frac{\partial \bar{U}(\zeta)}{\partial l_i} - \frac{\partial \bar{U}(\zeta)}{\partial l_l} = 4\pi\bar{\rho}(\zeta)\cos(n,\ l). \tag{48}$$

§ 10. Поведение потенциала двойного слоя при пересечении слоя

Пусть ζ — произвольная фиксированная точка двойного слоя, расположенного на поверхности Ляпунова S, и $\bar{\bar{\rho}}_0 = \bar{\bar{\rho}}(\zeta)$ — его плотность в точке ζ. Рассмотрим разность

$$\bar{\bar{\rho}}_0 \iint\limits_S \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS - \iint\limits_S \bar{\bar{\rho}} \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \iint\limits_S (\bar{\bar{\rho}}_0 - \bar{\bar{\rho}}) \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS, \tag{49}$$

когда точка x совпадает с точкой ζ. Предположим, что плотность слоя $\bar{\bar{\rho}}$ непрерывна. Тогда интеграл в правой части заведомо непрерывен. Действительно, пусть s — некоторая принадлежащая S окрестность точки ζ. При этом

$$\left| \iint\limits_s (\bar{\bar{\rho}}_0 - \bar{\bar{\rho}}) \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS \right| \leqslant |\bar{\bar{\rho}}_0 - \bar{\bar{\rho}}|_s \iint\limits_s \left| \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) \right| dS,$$

где $|\bar{\bar{\rho}}_0 - \bar{\bar{\rho}}|_s$ — наибольшее абсолютное значение разности $\bar{\bar{\rho}}_0 - \bar{\bar{\rho}}$ на s. Как мы видели в § 8, интеграл в правой части этого неравенства ограничен. Поэтому, в силу предположения о непрерывности функции $\bar{\bar{\rho}}$, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, окрестность $s(\varepsilon)$ всегда можно выбрать настолько малой, чтобы было

$$\left| \iint\limits_{s(\varepsilon)} (\bar{\bar{\rho}}_0 - \bar{\bar{\rho}}) \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS \right| < \varepsilon.$$

Поскольку на границах окрестности $s(\varepsilon)$ функция $(\bar{\bar{\rho}}_0 - \bar{\bar{\rho}}) \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)$ непрерывна, то рассматриваемый интеграл равномерно сходится в точке ζ, а поэтому непрерывен в ней. Следовательно, разрывы, которые могут испытывать интегралы в левой части равенства (27) при пересечении точкой x слоя, должны быть одинаковы. Приняв во внимание формулу Гаусса (45), придем к выводу, что потенциал двойного слоя при приближении к произвольной точке ζ слоя извне или изнутри S соответственно стремится к значениям

и
$$\left.\begin{aligned}\overline{\overline{U}}_{2e}(\zeta)&=\overline{\overline{U}}(\zeta)+2\pi\overline{\overline{\rho}}_0,\\ \overline{\overline{U}}_{2i}(\zeta)&=\overline{\overline{U}}(\zeta)-2\pi\overline{\overline{\rho}}_0,\end{aligned}\right\}\tag{50}$$

где
$$\overline{\overline{U}}(\zeta)\equiv\iint\limits_S\overline{\overline{\rho}}\,\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS\tag{51}$$

— непрерывная на S функция, которую будем называть *прямым значением* потенциала двойного слоя.

Обратим внимание на формальное сходство формул (50) и (38).

Исследование поведения производных потенциала двойного слоя на поверхностях Ляпунова требует значительного усложнения всех рассуждений и выкладок. Поэтому ограничимся замечанием, что при известных допущениях о гладкости функции $\overline{\overline{\rho}}$ можно показать *, что при пересечении поверхности Ляпунова S, на которой расположен двойной слой, *нормальные* производные потенциала двойного слоя остаются непрерывными, тогда как *тангенциальные* производные испытывают разрыв. Величина этого разрыва такова, что внешняя тангенциальная производная на $2\pi\frac{\partial\overline{\overline{\rho}}(\zeta)}{\partial\tau}$ меньше, а внутренняя — на эту же величину больше *прямого значения* касательной производной в точке ζ.

ЗАДАЧА (ПРИМЕР ЛЯПУНОВА)

Показать, что выполнение условия Гёльдера:

$$\frac{\left|\overline{\overline{\rho}}(\xi)-\overline{\overline{\rho}}(\zeta)\right|}{|\xi-\zeta|^{\lambda_1}}<A_1,\ A_1>0,\ \lambda_1>0,\quad \xi,\eta\in S$$

недостаточно для существования нормальных производных двойного слоя. Для этого рассмотреть поверхность Ляпунова S, часть S_1 которой *плоска*. На S_1 взять круг Σ с центром в точке ζ и предположить, что

$$\overline{\overline{\rho}}=A_1|\zeta-\xi|^{\lambda_1},\ \text{когда}\ \xi\in\Sigma.$$

Затем интегрированием по Σ найти выражение для потенциала двойного слоя в точках вблизи Σ и, дифференцируя это выражение, показать, что нормальные производные потенциала вблизи Σ неограниченно возрастают.

§ 11. Уровенные распределения

В этом и следующих двух параграфах указаны некоторые приложения теории ньютоновского потенциала к изучению полей тяготения (гравиметрии).

---

* См. Гюнтер [22], гл. II, § 10.