извне или изнутри S соответственно стремится к значениям

и
$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{U}}_{2e}(\zeta) &= \overline{\overline{U}}(\zeta) + 2\pi\overline{\overline{\rho}}_0, \\ \overline{\overline{U}}_{2i}(\zeta) &= \overline{\overline{U}}(\zeta) - 2\pi\overline{\overline{\rho}}_0, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

где
$$\overline{\overline{U}}(\zeta) \equiv \iint\limits_S \overline{\overline{\rho}}\, \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS \tag{51}$$

— непрерывная на S функция, которую будем называть *прямым значением* потенциала двойного слоя.

Обратим внимание на формальное сходство формул (50) и (38).

Исследование поведения производных потенциала двойного слоя на поверхностях Ляпунова требует значительного усложнения всех рассуждений и выкладок. Поэтому ограничимся замечанием, что при известных допущениях о гладкости функции $\overline{\overline{\rho}}$ можно показать *, что при пересечении поверхности Ляпунова S, на которой расположен двойной слой, *нормальные* производные потенциала двойного слоя остаются непрерывными, тогда как *тангенциальные* производные испытывают разрыв. Величина этого разрыва такова, что внешняя тангенциальная производная на $2\pi\frac{\partial\overline{\overline{\rho}}(\zeta)}{\partial\tau}$ меньше, а внутренняя — на эту же величину больше *прямого значения* касательной производной в точке ζ.

ЗАДАЧА (ПРИМЕР ЛЯПУНОВА)

Показать, что выполнение условия Гёльдера:

$$\frac{\left|\overline{\overline{\rho}}(\xi) - \overline{\overline{\rho}}(\zeta)\right|}{|\xi - \zeta|^{\lambda_1}} < A_1,\ A_1 > 0,\ \lambda_1 > 0, \quad \xi, \eta \in S$$

недостаточно для существования нормальных производных двойного слоя. Для этого рассмотреть поверхность Ляпунова S, часть S_1 которой *плоска*. На S_1 взять круг Σ с центром в точке ζ и предположить, что

$$\overline{\overline{\rho}} = A_1 |\zeta - \xi|^{\lambda_1}, \text{ когда } \xi \in \Sigma.$$

Затем интегрированием по Σ найти выражение для потенциала двойного слоя в точках вблизи Σ и, дифференцируя это выражение, показать, что нормальные производные потенциала вблизи Σ неограниченно возрастают.

§ 11. Уровенные распределения

В этом и следующих двух параграфах указаны некоторые приложения теории ньютоновского потенциала к изучению полей тяготения (гравиметрии).

---

* См. Гюнтер [22], гл. II, § 10.

Рассмотрим ньютоновский потенциал (1) при плотности $\rho \geqslant 0$. Гравитационную постоянную пока примем равной единице. Распределение масс будем предполагать таким, что все рассматриваемые ниже потенциалы существуют, а также существуют замкнутые поверхности, на которых ньютоновский потенциал (1) сохраняет постоянное значение. Эти поверхности будем называть *уровенными*. Через V_Σ будем обозначать конечную область, для которой уровенная поверхность Σ служит границей, а через $(R_E - V_\Sigma)$ — дополнение области V_Σ до всего пространства. Ниже мы всегда будем предполагать, что $(R_E - V_\Sigma)$ является областью и не содержит тяготеющих масс. Через $\frac{d}{dn}$ будем обозначать дифференцирование по направлению внешней нормали n к поверхности Σ, рассматриваемой как граница бесконечной области $R_E - V_\Sigma$ (рис. 34).

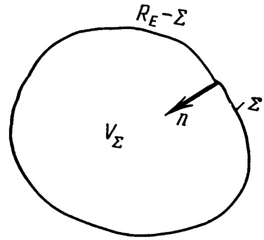

Рис. 34

Пусть U_0 — значение ньютоновского потенциала $U(x)$ на уровенной поверхности Σ. Так как ньютоновский потенциал вне области расположения масс гармоничен (§ 1), то в бесконечной области $R_E - V_\Sigma$ можно применить формулу (45) гл. XIX. Положив в ней $u(x) = U(x)$, $L(\xi, x) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}$, получим:

$$\frac{1}{4\pi} \iint\limits_\Sigma \left[\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - U_0 \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS = \begin{cases} U(x), & \text{когда } x \in R_E - V_\Sigma, \\ \frac{1}{2} U_0, & \text{когда } x \in \Sigma, \\ 0, & \text{когда } x \in V_\Sigma - \Sigma. \end{cases} \tag{52}$$

С другой стороны, функция $u(x) = U_0 = \text{const}$ гармонична в ограниченной области V_Σ, поэтому к ней в области V_Σ можно применить формулу (44) гл. XIX. Приняв во внимание, что нормаль n по отношению к области V_Σ является *внутренней* (вследствие чего следует изменить знак левой части формулы (44)), получим:

$$\frac{1}{4\pi} \iint\limits_\Sigma U_0 \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \begin{cases} U_0, & \text{когда } x \in V_\Sigma - \Sigma, \\ \frac{1}{2} U_0, & \text{когда } x \in \Sigma, \\ 0, & \text{когда } x \in R_E - V_\Sigma. \end{cases} \tag{53}$$

Сложив формулы (52) и (53), придем к соотношению:

$$\frac{1}{4\pi} \iint\limits_\Sigma \frac{1}{r}\frac{dU}{dn} dS = \begin{cases} U(x), & \text{когда } x \in R_E - V_\Sigma, \\ U_0, & \text{когда } x \in V_\Sigma, \end{cases} \tag{54}$$

которое дает выражение ньютоновского потенциала в области $R_E - V_\Sigma$ через значения его нормальной производной на уровенной поверхности Σ. Выражение в левой части соотношения (54) можно рассматривать как потенциал простого слоя с плотностью

$$\bar{\rho} = \frac{1}{4\pi} \frac{dU}{dn}. \tag{55}$$

Покажем, что на поверхности уровня $\frac{dU}{dn} > 0$. Действительно, из определения (1) ньютоновского потенциала следует, что при $\rho > 0$ и $U(x) > 0$. Если бы было $\frac{dU}{dn} \leqslant 0$, то в области $R_E - V_\Sigma$ функция U принимала бы значения $U \geqslant U_0$, что невозможно, так как в этой области она гармонична и, следовательно, максимальное значение принимает на границе Σ. Таким образом, плотность ρ *положительна*, т. е. простой слой (54) может быть образован *тяготеющими массами*.

Применим теперь в произвольной области V формулу Грина (7) гл. XVIII. Положив в ней $u = U$, $v = 1$, получим:

$$-\iint\limits_{\mathcal{F}V} \frac{dU}{dn} ds = \iiint\limits_{V} \Delta U dV. \tag{56}$$

Но, как мы знаем (§ 1), ньютоновский потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U = -4\pi\rho,$$

вследствие чего формула (56) может быть преобразована к виду

$$\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\mathcal{F}V} \frac{dU}{dn} dS = m, \tag{57}$$

где

$$m = \iiint\limits_{V} \rho dV$$

— тяготеющая масса, сосредоточенная в области V. Соотношение (57) называют *формулой Гаусса*. Пуанкаре показал, что формула Гаусса справедлива и тогда, когда вся масса или часть ее распределена на поверхности $\mathcal{F}V$.

Простой слой, образованный таким распределением массы на некоторой поверхности S, чтобы эта поверхность S была *уровенной*, называют *уровенным слоем*. Соответствующее распределение масс также называют *уровенным*.

Из формул (54) и (57) вытекает, что на всякой уровенной поверхности можно так распределить заключенную внутри нее массу, чтобы образовался *уровенный слой*, а ньютоновский потенциал в области $R_F - V_\Sigma$ не претерпел изменений. Для этого плотность слоя надо определить формулой (55).

Если на произвольной поверхности S масса m распределена так, что образовался уровенный слой, то это распределение единственно.

Действительно, допустим, что есть два различных уровенных распределения массы m, характеризуемых плотностями ρ_1 и ρ_2. В силу формул (54), в конечной области V_S, имеющей границей поверхность S, потенциал уровенного слоя постоянен. Следовательно, внутренняя нормальная производная (§ 8) потенциала уровенного слоя равна нулю. А поэтому, в силу формул (38), внешние нормальные производные потенциалов слоев с плотностями $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$ соответственно равны $4\pi\bar{\rho}_1$ и $4\pi\bar{\rho}_2$ и, следовательно, различны. Так как решение внешней задачи Неймана единственно (гл. XIX, § 4), то в области $R_E - R_S$ им соответствуют и два различных потенциала U_1 и U_2, принимающих на поверхности S значения U_{10} и U_{20}, которые также должны быть различными, ввиду единственности решения задачи Дирихле.

Рассмотрим функцию $U_1U_{20} - U_2U_{10}$. Она гармонична в области $R_E - V_S$ и равна нулю на поверхности S. Поэтому в области $R_E - V_S$:

$$U_1U_{20} - U_2U_{10} = 0.$$

При большом удалении от точек слоя потенциалы U_1 и U_2 с точностью до малых высшего порядка равны $\frac{m}{r}$, где r — расстояние от точки наблюдения x до произвольной точки слоя (см. § 2). Поэтому должно быть

$$\frac{m}{r} U_{20} - \frac{m}{r} U_{10} = 0,$$

отсюда

$$U_{10} = U_{20},$$

что противоречит предположению о существовании двух различных уровенных распределений данной массы m. Таким образом, если на поверхности S существует уровенное распределение, то оно единственно.

Гораздо сложнее доказательство существования уровенных распределений для произвольных поверхностей. Впервые этим вопросом занимался Гаусс. Вейерштрасс показал, что данное Гауссом доказательство несостоятельно. Лишь Нейманом было строго доказано существование уровенных распределений для широкого класса поверхностей.

§ 12. Энергия гравитационного поля. Задача Гаусса

Проблему энергии гравитационного поля затронем в связи с проблемой о равновесном распределении масс (задача Гаусса).

Как известно из курса физики, энергия системы распределенных тяготеющих масс с точностью до постоянного слагаемого равна

$$W = -\frac{\varkappa}{2} \iiint\limits_V U\rho dV, \tag{58}$$