Действительно, допустим, что есть два различных уровенных распределения массы m, характеризуемых плотностями ρ_1 и ρ_2. В силу формул (54), в конечной области V_S, имеющей границей поверхность S, потенциал уровенного слоя постоянен. Следовательно, внутренняя нормальная производная (§ 8) потенциала уровенного слоя равна нулю. А поэтому, в силу формул (38), внешние нормальные производные потенциалов слоев с плотностями $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$ соответственно равны $4\pi\bar{\rho}_1$ и $4\pi\bar{\rho}_2$ и, следовательно, различны. Так как решение внешней задачи Неймана единственно (гл. XIX, § 4), то в области $R_E - R_S$ им соответствуют и два различных потенциала U_1 и U_2, принимающих на поверхности S значения U_{10} и U_{20}, которые также должны быть различными, ввиду единственности решения задачи Дирихле.

Рассмотрим функцию $U_1U_{20} - U_2U_{10}$. Она гармонична в области $R_E - V_S$ и равна нулю на поверхности S. Поэтому в области $R_E - V_S$:

$$U_1U_{20} - U_2U_{10} = 0.$$

При большом удалении от точек слоя потенциалы U_1 и U_2 с точностью до малых высшего порядка равны $\frac{m}{r}$, где r — расстояние от точки наблюдения x до произвольной точки слоя (см. § 2). Поэтому должно быть

$$\frac{m}{r} U_{20} - \frac{m}{r} U_{10} = 0,$$

отсюда

$$U_{10} = U_{20},$$

что противоречит предположению о существовании двух различных уровенных распределений данной массы m. Таким образом, если на поверхности S существует уровенное распределение, то оно единственно.

Гораздо сложнее доказательство существования уровенных распределений для произвольных поверхностей. Впервые этим вопросом занимался Гаусс. Вейерштрасс показал, что данное Гауссом доказательство несостоятельно. Лишь Нейманом было строго доказано существование уровенных распределений для широкого класса поверхностей.

§ 12. Энергия гравитационного поля. Задача Гаусса

Проблему энергии гравитационного поля затронем в связи с проблемой о равновесном распределении масс (задача Гаусса).

Как известно из курса физики, энергия системы распределенных тяготеющих масс с точностью до постоянного слагаемого равна

$$W = -\frac{\varkappa}{2} \iiint\limits_V U\rho dV, \tag{58}$$

где U — потенциал поля тяготения, ρ — плотность вещества, $\varkappa$ — гравитационная постоянная, а интегрирование распространено на любую область, содержащую все тяготеющие массы внутри себя. Будем считать, что среди этих областей есть конечная (т. е. масс на бесконечности нет). Знак минус перед интегралом обусловлен действием между тяготеющими массами сил притяжения. Для системы одноименных электрических зарядов положение было бы обратным, в соответствии с чем правая часть (58) имела бы обратный знак.

Подставив в равенство (58) значение ρ из уравнения Пуассона и применив формулу Грина (7) гл. XVIII при $u=v=U$, получим

$$W = -\frac{\varkappa}{8\pi}\iiint\limits_{V}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2\right]dV+\frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\mathcal{F}V}U\frac{\partial U}{\partial n}\,dS.$$

Если интегрирование распространить на все пространство (что, очевидно, не изменит значения интеграла (58)), то интеграл по поверхности $\mathcal{F}V$ обратится в нуль, вследствие чего придем к соотношению

$$W = -\frac{\varkappa}{8\pi}\iiint\limits_{R_E}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2\right]dV. \qquad (59)$$

Стоящий здесь справа интеграл — это уже известный нам *интеграл Дирихле*, который, таким образом, характеризует *энергию поля*.

Интегралы (58) и (59) иллюстрируют два возможных представления о поле. Интеграл (58) связывает энергию поля с распределением масс, так как подынтегральное выражение обращается в нуль в областях, где масс нет. Это позволяет истолковать энергию поля, как *энергию взаимодействия масс*, связанную с самими массами. Интеграл же (59) выражает энергию только через потенциал поля, причем каждому элементу объема поля, — в том числе и в тех частях пространства, где *никаких масс нет* — соответствует определенное, отличное от нуля, значение подынтегрального выражения, как если бы в каждом элементе объема поля было локализовано некоторое количество энергии. Это позволяет истолковать энергию W, как *энергию собственно гравитационного поля*, которое при этом естественно рассматривать как самостоятельный физический объект. В связи с этим величину

$$-\frac{\varkappa}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2\right] \qquad (60)$$

называют *плотностью энергии* гравитационного поля.

Перейдем теперь к знаменитой *задаче Гаусса*: при каких распределениях массы внутри и на заданной поверхности S потенциальная энергия поля имеет экстремумы.

Эта задача тесно связана с проблемой равновесия масс. Система покоящихся масс находится в состоянии устойчивого равновесия, если энергия их взаимодействия имеет минимальное значение, совместимое со связями, ограничивающими возможные конфигурации системы (принцип минимума потенциальной энергии). В противном случае равновесия нет или состояние равновесия неустойчиво.

Воспользуемся вариационными методами. Варьируя плотность ρ в некоторой конечной области V_ρ, будем искать такое распределение масс в этой области, при котором вариация энергии их гравитационного поля

$$\delta W = 0. \tag{61}$$

Это распределение и будет соответствовать экстремуму.

Из соотношения (58)

$$\delta W = \delta \iiint\limits_V U\rho\, dV = \iiint\limits_V (U\delta\rho + \rho\delta U)\, dV = 0, \tag{62}$$

где V — область, заключающая область V_ρ внутри себя или совпадающая с ней, $\delta\rho$ — произвольная вариация плотности массы, подчиненная только условию сохранения массы в области V_ρ:

$$\iiint\limits_{V_\rho} \delta\rho\, dV = 0, \tag{63}$$

а δU — вариация потенциала, обусловленная вариацией ρ.

Положим теперь в формуле Грина (7) гл. XVIII $u = U$, $v = \delta U$, что даст

$$\iiint\limits_V (U\Delta\delta U - \delta U \Delta U)\, dV = \iint\limits_{\mathcal{F}V} \left(U \frac{\partial \delta U}{\partial n} - \delta U \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS. \tag{64}$$

Устремим объем V к бесконечности. Вне области, занятой массами, функции U и δU гармоничны. Поэтому на основании леммы о поведении гармонической функции на бесконечности (гл. XIX, § 3), заключим, что подынтегральное выражение в интеграле по $\mathcal{F}V$ стремится к нулю, как $\frac{1}{r^3}$, в силу чего на бесконечности этот интеграл обращается в нуль. Следовательно,

$$\iiint\limits_{R_E} U\Delta\delta U\, dV = \iiint\limits_{R_E} \delta U\, \Delta U\, dV,$$

что после подстановки

$$\Delta U = -4\pi\rho, \quad \Delta\delta U = \delta\Delta U = -4\pi\delta\rho$$

даст

$$\iiint\limits_{R_E} U\delta\rho\, dV = \iiint\limits_{R_E} \rho\delta U\, dV.$$

Так как вне V_ρ $\rho = \delta\rho = 0$, то

$$\iiint\limits_{V_\rho} U\delta\rho\, dV = \iiint\limits_{V_\rho} \rho\, \delta U\, dV \tag{65}$$

и условие (62) эквивалентно следующему:

$$\iiint\limits_{V_\rho} U\,\delta\rho\,dV = 0. \tag{66}$$

Но это последнее может выполняться для вариации $\delta\rho$, подчиненной лишь условию (63), только тогда, когда в области V потенциал $U = U_0 = \text{const}$. Но если $U = U_0$ внутри области, то ввиду непрерывности потенциала он должен быть равен U_0 и на поверхности $\mathcal{F}V_\rho$, что, как мы знаем, возможно только при распределении массы на $\mathcal{F}V_\rho$ в виде *уровенного слоя.*

Таким образом, *энергия гравитационного поля масс, расположенных в области V_ρ, имеет экстремум, когда вся масса распределена на границе $\mathcal{F}V_\rho$ области в виде уровенного слоя.* Отсюда, в частности, следует, что при указанном распределении достигается и экстремум интеграла Дирихле.

Легко видеть, что экстремум при уровенном распределении масс является *максимумом* по сравнению с любым распределением масс *внутри* области V_ρ и *минимумом* по сравнению с любым распределением этих же масс *вне* или *на* поверхности $\mathcal{F}V_\rho$. Отсюда следует, что если массы с поверхности $\mathcal{F}V_\rho$ могут проникать внутрь области V_ρ, то уровенное распределение *неустойчиво*, в противном же случае оно *устойчиво.* Поэтому, например, *жидкость*, «налитая на непроницаемую для нее поверхность $\mathcal{F}V_\rho$», под действием сил тяготения *будет распределяться* на ней *в виде уровенного слоя.*

Иначе обстоит дело при распределении одноименных электрических зарядов. В этом случае вместо притяжения имеет место *отталкивание*, и энергия поля определяется выражениями вида (58) и (59), взятыми с обратным знаком. Поэтому уровенное распределение зарядов, могущих перемещаться только в некотором конечном объеме V_ρ, устойчиво. Отсюда вытекает, что *свободные заряды, содержащиеся в проводнике, в состоянии равновесия располагаются на поверхности проводника, образуя уровенный слой,* в силу чего потенциал проводника во всех его точках имеет одинаковое значение. Из последнего обстоятельства, в частности, следует, что *электростатическое поле внутрь проводника не проникает.* Действительно, если потенциал поля постоянен, то напряженность поля равна нулю.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что энергия гравитационного поля массивного шара радиуса R с равномерно распределенной массой равна

$$W = -\frac{3\gamma}{5}\frac{m^2}{R}.$$

2. Показать, что энергия гравитационного поля, образованного уровенным распределением массы m на шаровой поверхности радиуса R, равна

$$W = -\frac{\gamma}{2}\frac{m^2}{R}.$$

3. Показать, что энергия электростатического поля равна

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint\limits_{R_E} \mathbf{E}^2\, dV,$$

где **E** — вектор напряженности поля.

§ 13. Поле тяжести. Теорема Стокса

Рассмотрим массивное тело, вращающееся с постоянной скоростью ω вокруг оси, сохраняющей свою ориентацию в пространстве. Это тело будем называть *планетой.*

На любое тело, покоящееся на поверхности планеты, действуют сила ньютоновского тяготения и центробежная сила инерции. Их геометрическую сумму будем называть *силой тяжести.*

Докажем, что сила тяжести имеет потенциал. Поскольку сила тяготения имеет потенциал (ньютоновский), для этого достаточно убедиться в существовании потенциала центробежной силы.

Введем прямоугольную декартову систему координат с началом в центре инерции планеты и осью 3, направленной по оси вращения. На тело единичной массы, связанное с планетой, действует центробежная сила инерции, компоненты которой по осям этой системы соответственно равны $x_1\omega^2$, $x_2\omega^2$, 0. Но эти величины являются частными производными по x_1, x_2 и x_3 от выражения

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2), \tag{67}$$

которое поэтому и представит потенциал центробежной силы.

Таким образом, потенциал силы тяжести равен

$$W = \varkappa U + \Omega = \varkappa \iiint\limits_{V_\rho} \frac{\rho}{r}\, dV + \frac{\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2), \tag{68}$$

где U — ньютоновский потенциал, $\varkappa$ — гравитационная постоянная, V_ρ — объем планеты, ρ — плотность вещества планеты.

Из равенства (18) следует, что потенциал силы тяжести удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta W = -4\pi\varkappa\rho + 2\omega^2. \tag{69}$$

Поверхности σ, на которых потенциал силы тяжести имеет постоянное значение W_0, будем называть *уровенными поверхностями потенциала силы тяжести* или просто уровенными поверхностями σ. Следует, однако, помнить, что уровенные поверхности ньютоновского потенциала и потенциала силы тяжести не совпадают.