2. Показать, что энергия гравитационного поля, образованного уровенным распределением массы m на шаровой поверхности радиуса R, равна

$$W = -\frac{\gamma}{2}\frac{m^2}{R}.$$

3. Показать, что энергия электростатического поля равна

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint\limits_{R_E} \mathbf{E}^2\, dV,$$

где $\mathbf{E}$ — вектор напряженности поля.

§ 13. Поле тяжести. Теорема Стокса

Рассмотрим массивное тело, вращающееся с постоянной скоростью ω вокруг оси, сохраняющей свою ориентацию в пространстве. Это тело будем называть *планетой*.

На любое тело, покоящееся на поверхности планеты, действуют сила ньютоновского тяготения и центробежная сила инерции. Их геометрическую сумму будем называть *силой тяжести*.

Докажем, что сила тяжести имеет потенциал. Поскольку сила тяготения имеет потенциал (ньютоновский), для этого достаточно убедиться в существовании потенциала центробежной силы.

Введем прямоугольную декартову систему координат с началом в центре инерции планеты и осью 3, направленной по оси вращения. На тело единичной массы, связанное с планетой, действует центробежная сила инерции, компоненты которой по осям этой системы соответственно равны $x_1\omega^2$, $x_2\omega^2$, 0. Но эти величины являются частными производными по x_1, x_2 и x_3 от выражения

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2), \tag{67}$$

которое поэтому и представит потенциал центробежной силы.

Таким образом, потенциал силы тяжести равен

$$W = \varkappa U + \Omega = \varkappa \iiint\limits_{V_\rho} \frac{\rho}{r}\, dV + \frac{\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2), \tag{68}$$

где U — ньютоновский потенциал, $\varkappa$ — гравитационная постоянная, V_ρ — объем планеты, ρ — плотность вещества планеты.

Из равенства (18) следует, что потенциал силы тяжести удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta W = -4\pi\varkappa\rho + 2\omega^2. \tag{69}$$

Поверхности σ, на которых потенциал силы тяжести имеет постоянное значение W_0, будем называть *уровенными поверхностями потенциала силы тяжести* или просто уровенными поверхностями σ. Следует, однако, помнить, что уровенные поверхности ньютоновского потенциала и потенциала силы тяжести не совпадают.

По аналогии с обозначениями, принятыми ранее, через V_σ будем обозначать конечную область, для которой поверхность σ является границей, а через $R_E - V_\sigma$ — дополнение этой области до всего пространства R_E. Через $\frac{d}{dn}$ будем обозначать дифференцирование по направлению внешней нормали n к поверхности σ, рассматриваемой как граница бесконечной области $R_E - V_\sigma$.

Производную потенциала по направлению нормали n к уровенной поверхности σ

$$g = \frac{dW}{dn} \tag{70}$$

будем называть *ускорением силы тяжести*. Ускорение силы тяжести является величиной, которая может быть непосредственно и наиболее точно, по сравнению с другими характеристиками поля тяжести, измерена на поверхности Земли.

Пусть σ — уровенная поверхность, лежащая целиком вне области, занятой планетой. Применив к потенциалу W формулу (43) гл. XIX, с учетом данного выше определения символа $\frac{d}{dn}$, получим:

$$-\iint\limits_{\sigma} \left[\frac{1}{r}\frac{dW}{dn} - W_0 \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS - \iiint\limits_{V_\sigma} \frac{\Delta W}{r} dV =$$
$$= \begin{cases} 4\pi W(x), & \text{когда } x \in V_\sigma - \sigma, \\ 2\pi W_0, & \text{когда } x \in \sigma, \\ 0, & \text{когда } x \in R_E - V_\sigma. \end{cases} \tag{71}$$

Из уравнения (69) следует, что

$$\iiint\limits_{V_\sigma} \frac{\Delta W}{r} dV = -4\pi \varkappa \iiint\limits_{V_\rho} \frac{\rho}{r} dV + 2\omega^2 \iiint\limits_{V_\sigma} \frac{1}{r} dV =$$
$$= -4\pi\varkappa U(x) + 2\omega^2 \iiint\limits_{V_\sigma} \frac{dV}{r}.$$

Далее, положив в формуле (43) гл. XIX $u = W_0$, $L(\xi, x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$, найдем, что

$$\iint\limits_{\sigma} W_0 \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \begin{cases} 4\pi W_0, & \text{когда } x \in V_\sigma - \sigma, \\ 2\pi W_0, & \text{когда } x \in \sigma, \\ 0, & \text{когда } x \in R_E - V_\sigma. \end{cases} \tag{72}$$

Вносся в формулу (71) полученные выражения, а также выражения (67) и (70), получим:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{g}{r}\,dS+\frac{\omega^2}{2\pi}\iiint\limits_{V_\sigma}\frac{dV}{r}+\frac{\omega^2}{2}(x_1^2+x_2^2)=W_0 \qquad (x\in V_\sigma), \quad (73)$$

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{g}{r}\,dS+\frac{\omega^2}{2\pi}\iiint\limits_{V_\sigma}\frac{dV}{r}=\varkappa U(x) \qquad (x\in R_E-V_\sigma+\sigma). \quad (74)$$

Формула (73) определяет потенциал $\varkappa U(x)$ ньютоновской *силы тяготения* вне уровенной поверхности σ по распределению *ускорения силы тяжести* на σ. Итак, если знать угловую скорость вращения ω планеты, уровенную поверхность σ и распределение на ней ускорения силы тяжести, то поле тяготения планеты в области R_E-V_σ может быть полностью определено. Справедливо, однако, и более сильное утверждение, известное как *теорема Стокса*: если заданы: а) уровенная поверхность σ, охватывающая планету, б) масса планеты, в) угловая скорость вращения планеты, то потенциал силы тяготения вне σ и ускорение силы тяжести на σ определяются однозначно.

Таким образом, теорема Стокса утверждает, что знание только массы планеты, ее угловой скорости и уровенной поверхности потенциала силы тяжести, позволяет решить основные гравиметрические задачи: определение поля тяготения планеты и распределения поля тяжести на ее поверхности (последнее, конечно, требует знания уровенной поверхности, близкой к поверхности планеты). *Знать распределение массы в планете не требуется.*

Перейдем к доказательству теоремы Стокса. В силу формулы (74) достаточно показать, что задание уровенной поверхности σ, массы планеты m и ее угловой скорости ω однозначно определяет ускорение силы тяжести g на σ. Допустим обратное. Пусть g_1 и g_2 — два различных распределения ускорения силы тяжести на уровенной поверхности σ.

Интегрируя уравнение (69) по объему V_σ, получим:

$$\iiint\limits_{V_\sigma}\Delta W\,dV=-4\pi\varkappa m+2\omega^2 V. \quad (75)$$

С другой стороны, применив формулу Остроградского — Гаусса и приняв во внимание данное выше определение символа $\frac{d}{dn}$, убедимся, что

$$\iiint\limits_{V_\sigma}\Delta W\,dV=-\iint\limits_{\sigma}\frac{dW}{dn}\,dS=-\iint\limits_{\sigma}g\,dS. \quad (76)$$

Исключив из найденных соотношений значение объемного интеграла, получим

$$\iint_\sigma g\,dS = 4\pi\varkappa m + 2\omega^2 V. \tag{77}$$

Положив здесь в одном случае $g=g_1$, а в другом $g=g_2$, и взяв разность полученных выражений, найдем, что

$$\iint_\sigma (g_1 - g_2)\,dS = 0. \tag{78}$$

С другой стороны, подставив $g=g_1$ и $g=g_2$ в формулу (73) и вычтя получившиеся соотношения, найдем, что

$$\iint_\sigma \frac{g_1-g_2}{r}\,dS = W_{01} - W_{02} = \text{const}, \quad \text{когда} \quad x \in V_\sigma; \tag{79}$$

через W_{01} и W_{02} здесь обозначены потенциалы силы тяжести на уровенной поверхности σ при $g=g_1$ и $g=g_2$. Интеграл $\overline{U}$ в левой части соотношения (79) представляет потенциал простого слоя. По формулам (38), разность его внешней и внутренней нормальных производных на поверхности σ равна

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial n_e} - \frac{\partial \overline{U}}{\partial n_i} = 4\pi (g_1 - g_2). \tag{80}$$

Так как в области V_σ потенциал $\overline{U}$ постоянен, то производная $\frac{\partial U}{\partial n_i} = 0$, а производная $\frac{\partial U}{\partial n_e}$ сохраняет знак. Первое утверждение очевидно. Второе вытекает из того, что в области $R_e - V_\sigma$ потенциал $\overline{U}$ гармоничен, так что постоянное значение, которое он имеет на σ, представляет либо максимум либо минимум. Это было бы невозможно, если бы производная $\frac{\partial U}{\partial n_e}$ меняла знак.

Из сохранения знака $\frac{\partial U}{\partial n_e}$ вытекает, что и разность $(g_1 - g_2)$ сохраняет знак на σ, а тогда из соотношения (78) следует, что $g_1 = g_2$. Тем самым теорема Стокса доказана.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что изменение распределения масс в планете может иметь следствием изменение поля тяготения всюду вне планеты. Объяснить, почему это не противоречит теореме Стокса.

2. Показать, что перераспределение масс в планете может не приводить к изменению поверхности уровня потенциала силы тяжести.

Указание. Рассмотреть планету с распределением масс, зависящим только от радиуса.

3. Вывести формулу Пуанкаре

$$\rho_{ср}=\frac{\omega^2}{2\pi\varkappa}+\frac{1}{4\pi\varkappa\overline{V}_S}\iint\limits_S g\,dS,$$

где $\rho_{ср}$ — средняя плотность планеты, S — произвольная замкнутая поверхность, внутри которой расположена планета, $\overline{V}_S$ — объем конечной области, для которой поверхность S служит границей.

Указание. Заметив, что формула (74) справедлива и тогда, когда σ — произвольная поверхность, окружающая планету, воспользоваться этой формулой.

4. Показать, что скорость вращения жидкой планеты подчинена неравенству

$$\omega^2 \leqslant 2\pi\varkappa\rho_{ср},$$

где $\rho_{ср}$ — средняя плотность планеты.

Указание. Для жидкой планеты должно быть $g > 0$.

§ 14. Логарифмический потенциал

Аналогией сил в пространстве, убывающих обратно пропорционально квадрату расстояния между точечными телами, на плоскости являются силы, убывающие обратно пропорционально расстоянию. При этом составляющие силы притяжения являются частными производными от функции

$$U = m\ln\frac{1}{r}, \tag{81}$$

которая носит название *логарифмического потенциала*. Коэффициент пропорциональности будем называть *массой* точечного тела, создающего (на плоскости) силовое поле с потенциалом (81).

Допустим теперь, что притягивающие массы однородной плотности ρ_1 расположены непрерывным образом вдоль некоторой кривой L. Если эти массы притягивают единичную массу, расположенную в точке x, по закону обратных расстояний, то образуемое таким образом поле будет обладать потенциалом, вычисляемым по формуле:

$$U = \int\limits_L \rho_1 \ln\frac{1}{r}\,dL, \tag{82}$$

где r — расстояние от точки x до переменной точки ξ контура L.

Этот потенциал называется *логарифмическим потенциалом простого слоя*. Его свойства аналогичны свойствам ньютоновского потенциала простого слоя. Так, например, в любой области, не содержащей точек контура, потенциал (82) представляет собой функцию *гармоническую*. Кроме того, легко показать, сделав некоторые предположения относительно контура L и плотности ρ_1, что этот потенциал будет функцией, *непрерывной* и в том случае, когда точка x совпадает с одной из точек контура L.

Отметим, однако, что при удалении точки x на бесконечность логарифмический потенциал изменяется иначе, чем ньютоновский