3. Вывести формулу Пуанкаре

$$\rho_{\text{ср}}=\frac{\omega^2}{2\pi\varkappa}+\frac{1}{4\pi\varkappa\overline{V}_S}\iint\limits_S g\,dS,$$

где $\rho_{\text{ср}}$ — средняя плотность планеты, S — произвольная замкнутая поверхность, внутри которой расположена планета, $\overline{V}_S$ — объем конечной области, для которой поверхность S служит границей.

Указание. Заметив, что формула (74) справедлива и тогда, когда σ — произвольная поверхность, окружающая планету, воспользоваться этой формулой.

4. Показать, что скорость вращения жидкой планеты подчинена неравенству

$$\omega^2 \leqslant 2\pi\varkappa\rho_{\text{ср}},$$

где $\rho_{\text{ср}}$ — средняя плотность планеты.

Указание. Для жидкой планеты должно быть $g > 0$.

§ 14. Логарифмический потенциал

Аналогией сил в пространстве, убывающих обратно пропорционально квадрату расстояния между точечными телами, на плоскости являются силы, убывающие обратно пропорционально расстоянию. При этом составляющие силы притяжения являются частными производными от функции

$$U = m \ln \frac{1}{r}, \tag{81}$$

которая носит название *логарифмического потенциала*. Коэффициент пропорциональности будем называть *массой* точечного тела, создающего (на плоскости) силовое поле с потенциалом (81).

Допустим теперь, что притягивающие массы однородной плотности ρ_1 расположены непрерывным образом вдоль некоторой кривой L. Если эти массы притягивают единичную массу, расположенную в точке x, по закону обратных расстояний, то образуемое таким образом поле будет обладать потенциалом, вычисляемым по формуле:

$$U = \int\limits_L \rho_1 \ln \frac{1}{r}\, dL, \tag{82}$$

где r — расстояние от точки x до переменной точки ξ контура L.

Этот потенциал называется *логарифмическим потенциалом простого слоя*. Его свойства аналогичны свойствам ньютоновского потенциала простого слоя. Так, например, в любой области, не содержащей точек контура, потенциал (82) представляет собой функцию *гармоническую*. Кроме того, легко показать, сделав некоторые предположения относительно контура L и плотности ρ_1, что этот потенциал будет функцией, *непрерывной* и в том случае, когда точка x совпадает с одной из точек контура L.

Отметим, однако, что при удалении точки x на бесконечность логарифмический потенциал изменяется иначе, чем ньютоновский потенциал простого слоя. Действительно, обозначив через R расстояние точки x от начала координат и повторив рассуждения, приведенные при изучении ньютоновского потенциала на бесконечности, легко доказать, что при больших значениях R логарифмический потенциал простого слоя выражается следующим приближенным равенством:

$$U(x)=m\ln\frac{1}{R}, \tag{83}$$

где через m обозначена вся масса притягивающего слоя. Из этой формулы видно, что логарифмический потенциал $U(x)$ стремится к бесконечности при беспредельном удалении точки x, между тем как ньютоновский потенциал $U(x)$ стремится в этом случае к нулю.

Обозначим через n направление внешней нормали к контуру L и составим криволинейный интеграл:

$$U_1(x)=\int\limits_L \rho_2\frac{d}{dn}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dL. \tag{84}$$

Этот интеграл носит название *логарифмического потенциала двойного слоя*, а входящая в него функция ρ_2 называется *плотностью* двойного слоя.

По определению и свойствам логарифмический потенциал аналогичен ньютоновскому потенциалу двойного слоя. Ясно, что во всякой области, не содержащей точек контура L, функция $U_1(x)$ *гармонична*. Далее, приняв во внимание, что

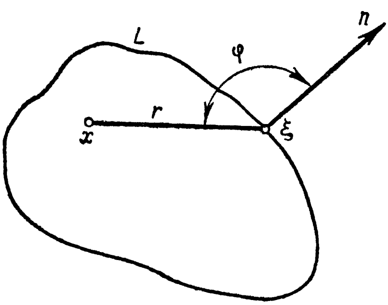

Рис. 35

$$\frac{d}{dn}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=\frac{\cos\varphi}{r}, \tag{85}$$

где φ — угол между направлениями n и r (рис. 35), этому потенциалу можно придать такую форму:

$$U_1(x)=\int\limits_L \varrho_2\ \frac{\cos\varphi}{z}\,dL \tag{86}$$

и показать, что на контуре потенциал U_1 претерпевает разрыв непрерывности, аналогичный разрыву непрерывности ньютоновского потенциала двойного слоя. Если L представляет собой замкнутый контур, удовлетворяющий условиям, аналогичным условиям Ляпунова для поверхностей, и, в частности, имеющий в каждой из своих точек определенную касательную, то вышеуказанный разрыв характеризуется равенствами:

$$\left.\begin{aligned} U_{1i}&=U_{10}-\pi\rho_{20},\\ U_{1e}&=U_{10}+\pi\rho_{20},\end{aligned}\right\} \tag{87}$$

где U_{10} и ρ_{20} — прямое значение потенциала U_1 и значение плотности ρ_2 в какой-нибудь точке ζ, лежащей на контуре L, а U_{1i} и U_{1e} — предельные значения того же потенциала в тех случаях, когда точка x стремится совпасть с точкой ζ, подходя к ней или *изнутри* или *извне* контура L.

В частном случае $\varrho_2 = 1$ интеграл

$$\int\limits_L \frac{\cos\varphi}{r}\,dL, \tag{88}$$

аналогичный интегралу в формуле Гаусса, имеет три различных значения:

$$-2\pi, \quad 0, \quad -\pi$$

в зависимости от того, будет ли точка x находиться *внутри*, *вне* или *на контуре* L.

Применим формулу (88) к решению внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге радиуса r_0. С этой целью поместим полюс полярной системы координат в центр круга, а полярную ось направим по оси 1. Обозначим далее через r_0, θ_0 и r', θ' полярные координаты точек ζ и x, а через $f(r_0, \theta)$ — заданную функцию, изменяющуюся непрерывным образом на окружности $r' = r_0$. Составим теперь потенциал двойного слоя:

$$U_1(r, \theta) = \int\limits_C f(r_0, \theta)\frac{\cos\varphi}{r}\,dC, \tag{89}$$

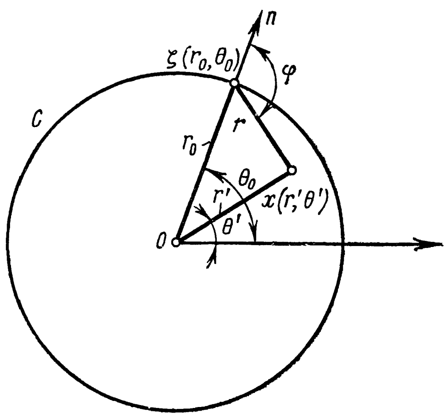

Рис. 36

где C — окружность, и обратимся к рис. 36. Из этого рисунка ясно, что в том случае, когда точка x приходит на контур, имеет место следующее равенство:

$$-\frac{\cos\varphi}{r} = \frac{1}{2r_0}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что потенциал (89) имеет на окружности *постоянное значение*, определяемое равенством:

$$U_1(r_0, \theta) = -\frac{1}{2r_0}\int\limits_C f(r_0, \theta)\,dC, \tag{90}$$

на основании чего нетрудно доказать, что формула

$$U(r, \theta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_C f(r_0, \theta)\left(\frac{1}{2r_0}-\frac{\cos\varphi}{r}\right)dC \qquad (91)$$

дает решение внутренней задачи Дирихле, другими словами, эта формула определяет функцию $U(r, \theta)$, *гармоническую* внутри и принимающую заданное значение $f(r_0, \theta)$ на окружности C. В самом деле, переписав соотношение (11) в виде

$$U(r, \theta)=\frac{1}{\pi}\left[U_1(r_0, \theta)-U_1(r, \theta)\right]$$

легко убедимся, что $U(r, \theta)$ есть функция гармоническая. Приближая теперь точку x к точке ζ, найдем, что

$$\lim_{x\to\zeta} U(r, \theta)=\frac{1}{\pi}\left[U_1(r_0, \theta)-\lim_{x\to\zeta} U_1(r, \theta)\right].$$

Но по первой из формул (87)

$$\lim_{x\to\zeta} U_1(r, \theta)=U_1(r_0, \theta)-\pi f(r_0, \theta),$$

следовательно,

$$\lim_{x\to\zeta} U(r, \theta)=f(r_0, \theta),$$

что и требовалось доказать.

Замечая теперь, что на окружности C $dl=r_0\,d\theta$, можно написать формулу (91) в следующей форме:

$$U(r, \theta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(r_0, \theta_0)\,\frac{r^2-r_0^2}{r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)+r^2}\,d\theta_0. \qquad (92)$$

Это *интегральная формула Пуассона.* Ее легко преобразовать также к виду (76) гл. XIX.

Подобно потенциалу двойного слоя оказываются разрывными на контуре и нормальные производные логарифмического потенциала простого слоя. Этот разрыв характеризуется формулами

$$\frac{dU}{dn_i}=\pi\rho_{10}+\int\limits_L \rho_1\frac{\cos\psi}{r'}\,dL, \qquad (93)$$

$$\frac{dU}{dn_e}=-\pi\rho_{10}+\int\limits_L \rho_1\frac{\cos\psi}{r'}\,dL, \qquad (94)$$

аналогичными соответствующим формулам теории ньютоновского потенциала. В этих формулах через ρ_{10}, $\frac{dU}{dn_i}$, $\frac{dU}{dn_e}$ обозначены плотность и нормальные производные потенциала в какой-нибудь точке ζ, принадлежащей контуру L. Что же касается обозначений r' и ψ, то они ясны из рис. 37, на котором через ξ обозначена *переменная точка* контура L.

Покажем, как, пользуясь формулой (93), решить в замкнутой форме внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в круге.

Обозначим через $f(\xi)$ заданную функцию, изменяющуюся непрерывным образом на окружности C и удовлетворяющую условию

$$\int_C f(\xi)\,dC = 0. \tag{95}$$

Составим с помощью этой функции интеграл

$$U(x) = \frac{1}{\pi}\int_C f(\xi)\ln\frac{1}{r}\,dC_\xi, \tag{96}$$

где r — расстояние от точки x до какой-нибудь точки ξ окружности C. Очевидно, что этот интеграл представляет собой функцию, гармо-

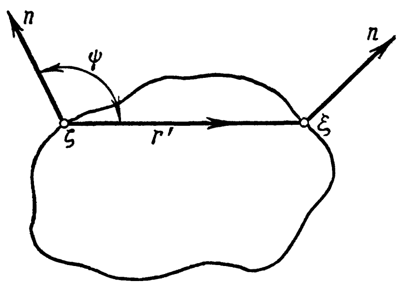

Рис. 37

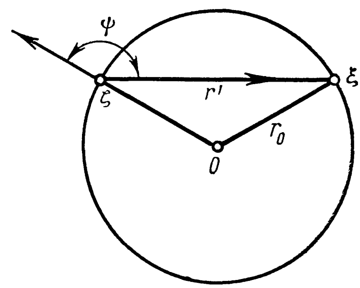

Рис. 38

ническую внутри данного круга, так как ясно, что его можно рассматривать как потенциал простого слоя с плотностью, определяемой равенством

$$\rho_1(\xi) = \frac{1}{\pi} f(\xi).$$

Докажем теперь, что в том случае, когда точка x приближается к точке ζ на C, нормальная производная $\frac{dU}{dn_i}$ от потенциала (96) стремится к значению $f(\zeta)$.

В самом деле, из рис. 38 видно, что

$$\frac{\cos\psi}{r'} = -\frac{1}{2r_0},$$

где r_0 — радиус данного круга. Пользуясь этим равенством и формулой (93), мы без труда найдем, что

$$\frac{dU}{dn_i} = f(\zeta) - \frac{1}{2r_0}\int_C f(\xi)\,dC.$$

Принимая теперь во внимание соотношение (95), окончательно получим:

$$\frac{dU}{dn_i}=f(\zeta),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, формула (96), найденная Дини, дает решение поставленной задачи.

Предположим, что некоторая часть плоскости заполнена притягивающими массами плотности ρ. Образуемое этими массами поле обладает потенциалом

$$U(x)=\iint_S \rho \ln\frac{1}{r}\,d\xi_1\,d\xi_2, \tag{97}$$

где r — расстояние от точки x до переменной точки ξ области S, заполненной притягивающими массами.

Этот потенциал обладает свойствами, аналогичными свойствам уже исследованного нами ньютоновского потенциала объемных масс. Так, например, во всякой точке, лежащей вне области S, он представляет собою функцию, *гармоническую* по переменным x_1 и x_2; если же точка x лежит внутри притягивающей площади, то этот потенциал удовлетворяет *уравнению Пуассона*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}=-2\pi\rho. \tag{98}$$

Если L обозначает какой-нибудь замкнутый контур, то нетрудно доказать справедливость следующей формулы:

$$\int_L \frac{dU}{dn}\,dL=-2\pi m, \tag{99}$$

где через $\frac{dU}{dn}$ обозначена производная от потенциала (97), взятая по направлению *внешней* нормали к контуру L, а через m — та часть всей притягивающей массы, которая заключается *внутри* контура L.

Глава XXI

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Построение системы линейно-независимых сферических функций

В § 4 гл. XX, при изучении ньютоновского потенциала, мы ввели сферические функции, определив их как множитель $Y_n(\theta, \varphi)$ в представлении потенциала порядка n:

$$U_n(R,\ \theta,\ \varphi)=\frac{Y_n(\theta,\ \varphi)}{R^{n+1}}, \tag{1}$$