Принимая теперь во внимание соотношение (95), окончательно получим:

$$\frac{dU}{dn_i}=f(\zeta),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, формула (96), найденная Дини, дает решение поставленной задачи.

Предположим, что некоторая часть плоскости заполнена притягивающими массами плотности ρ. Образуемое этими массами поле обладает потенциалом

$$U(x)=\iint\limits_S \rho \ln\frac{1}{r}\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{97}$$

где r — расстояние от точки x до переменной точки ξ области S, заполненной притягивающими массами.

Этот потенциал обладает свойствами, аналогичными свойствам уже исследованного нами ньютоновского потенциала объемных масс. Так, например, во всякой точке, лежащей вне области S, он представляет собою функцию, *гармоническую* по переменным x_1 и x_2; если же точка x лежит внутри притягивающей площади, то этот потенциал удовлетворяет *уравнению Пуассона*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}=-2\pi\rho. \tag{98}$$

Если L обозначает какой-нибудь замкнутый контур, то нетрудно доказать справедливость следующей формулы:

$$\int\limits_L \frac{dU}{dn}\, dL=-2\pi m, \tag{99}$$

где через $\frac{dU}{dn}$ обозначена производная от потенциала (97), взятая по направлению *внешней* нормали к контуру L, а через m — та часть всей притягивающей массы, которая заключается *внутри* контура L.

Глава XXI

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Построение системы линейно-независимых сферических функций

В § 4 гл. XX, при изучении ньютоновского потенциала, мы ввели сферические функции, определив их как множитель $Y_n(\theta, \varphi)$ в представлении потенциала порядка n:

$$U_n(R, \theta, \varphi)=\frac{Y_n(\theta, \varphi)}{R^{n+1}}, \tag{1}$$

где R, θ, φ — сферические координаты, и установили, что каждому значению n соответствует не более $(2n+1)$ линейно независимых сферических функций, через которые могут быть выражены остальные сферические функции порядка n.

В этой главе покажем, что сферические функции $Y(\theta, \varphi)$ естественно возникают при разделении переменных в уравнении Лапласа в сферических координатах R, θ, φ:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial u}{\partial R}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \tag{2}$$

Подставив в уравнение (2) выражение

$$u=v(R)Y(\theta, \varphi),$$

получим

$$\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial v}{\partial R}\right)+\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]=0.$$

Первое из слагаемых в левой части не зависит от θ и φ, а второе от R. Поэтому уравнение может удовлетворяться при всех R, θ, φ только тогда, когда каждое из слагаемых в левой части постоянно, т. е.

$$\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial v}{\partial R}\right)=\lambda,$$

$$\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]=-\lambda,$$

где λ — постоянная. Отсюда получим два уравнения:

$$R^2\frac{\partial^2 v}{\partial R^2}+2R\frac{dv}{dR}-\lambda v=0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0. \tag{4}$$

Общий интеграл уравнения (3) равен

$$v(R)=A_nR^n+\frac{B_n}{R^{n+1}}, \tag{5}$$

где число n удовлетворяет условию

$$n(n+1)=\lambda. \tag{6}$$

При n целом и $A_n=0$ получим решения уравнения Лапласа интересующего нас вида:

$$u=\frac{Y_n(\theta, \varphi)}{R^{n+1}}, \tag{7}$$

где $Y_n(\theta, \varphi)$ — какое-либо решение уравнения (4) при $\lambda=n(n+1)$ и n — целом. При нашем новом подходе мы, очевидно, исчерпываем все функции $Y_n(\theta, \varphi)$, входящие в решения уравнения Лапласа, имеющие вид (7). Следовательно, сферические функции являются решениями уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2}+n(n+1)Y_n=0, \tag{8}$$

имеющими непрерывные производные до второго порядка включительно. Эти решения будем называть *регулярными*, а само уравнение (8) — *уравнением сферических функций*.

Решения уравнения (8) также будем искать по методу разделения переменных. Подстановкой

$$Y_n(\theta,\ \varphi)=P(\theta)\,Q(\varphi) \tag{9}$$

уравнение (8) приведется к системе уравнений:

$$\frac{d^2Q_m}{d\varphi^2}+m^2Q_m=0, \tag{10}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_{nm}}{d\theta}\right)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_{nm}=0, \tag{11}$$

где m — произвольное число.

Однозначные непрерывные на окружности решения уравнения (10) получаются при целых значениях m. Каждому такому значению m соответствуют два линейно-независимых решения:

$$Q_m=\cos m\varphi \text{ и } Q_m=\sin m\varphi \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{12}$$

Займемся уравнением (11). Подстановкой

$$\zeta=\cos\theta$$

приведем его к виду

$$\frac{d}{d\zeta}(1-\zeta^2)\frac{dP_{nm}}{d\zeta}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\zeta^2}\right]P_{nm}=0. \tag{13}$$

В частности, при $m=0$ получим уравнение

$$\frac{d}{d\zeta}(1-\zeta^2)\frac{dP_n}{d\zeta}+n(n+1)P_n=0, \tag{14}$$

согласно формуле (4) гл. XVI являющееся уравнением полиномов Лежандра $P_n(\zeta)$. Произведем в уравнении (13) подстановку

$$P_{nm}(\zeta)=(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}y.$$

Функция y будет удовлетворять уравнению

$$(1-\zeta^2)\frac{d^2y}{d\zeta^2}-2(m+1)\zeta\frac{dy}{d\zeta}+(n-m)(n+m+1)y=0. \tag{15}$$

Чтобы найти его частные решения, продифференцируем уравнение полиномов Лежандра (14) m раз по ζ. Применив формулу Лейбница, получим

$$(1-\zeta^2)\frac{d^{m+2}P_n}{d\zeta^{m+2}}-2(m+1)\zeta\frac{d^{m+1}P_n}{d\zeta^{m+1}}+(n-m)(n+m+1)\frac{d^mP_n}{d\zeta^m}=0. \tag{16}$$

Сравнив это уравнение с уравнением (15), видим, что функции

$$y = \frac{d^m P_n(\zeta)}{d\zeta^m}$$

являются частными решениями уравнения (15). Отсюда ясно, что функции

$$P_{nm}(\zeta) = (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\zeta)}{d\zeta^m} \tag{17}$$

будут частными решениями уравнения (13). Возвращаясь к переменной θ, получим искомые частные решения уравнения (11):

$$P_{nm}(\cos\theta) = \sin^m\theta \frac{d^m}{d\cos\theta^m} P_n(\cos\theta). \tag{18}$$

Так как полиномы Лежандра $P_n(\cos\theta)$ представляют полиномы степени n от $\cos\theta$, функции $P_{nm}(\cos\theta)$ также представляют полиномы, причем

$$P_{nm}(\cos\theta) = 0 \quad \text{при} \quad m > n.$$

Функции $P_{nm}(\cos\theta)$ получили название *присоединенных полиномов Лежандра*. Как всякие полиномы они непрерывны и дифференцируемы неограниченное число раз.

Таким образом, для каждого n мы получили $(n+1)$ частных решений уравнения (11): $P_n(\cos\theta)$, $P_{n1}(\cos\theta)$, ..., $P_{nn}(\cos\theta)$, соответствующих значениям $m = 0, 1, 2, \ldots$ Комбинируя эти решения с решениями (12) уравнения (10), получим $(2n+1)$ сферических функций:

$$\begin{gathered} P_n(\cos\theta), \quad P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad P_{nm}(\cos\theta)\sin m\varphi, \\ (m = 1, 2, 3, \ldots, n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots), \end{gathered} \tag{19}$$

являющихся частными решениями уравнения (8). Эти $(2n+1)$ сферических функций линейно-независимы, так как линейно-независимы множители $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$. Функции $P_n(\cos\theta)$ получили название *зональных*, а функции $P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi$ и $P_{nm}(\cos\theta)\sin m\varphi$ — *тессеральных* сферических функций. О происхождении этих терминов см. задачу 4.

Как мы знаем, всего может быть $2n+1$ линейно-независимых сферических функций порядка n. Поэтому любую сферическую функцию $Y_n(\theta, \varphi)$ можно представить в виде линейной комбинации найденных линейно-независимых решений (19):

$$Y_n(\theta, \varphi) = a_0 P_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) P_{nk}(\cos\theta),$$

где a_0, a_k, b_k — постоянные.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x_3 + ix_1 \cos\zeta + ix_2 \sin\zeta,\ \zeta)\, d\zeta,$$

где $f(\xi, \zeta)$ — произвольная функция, допускающая дифференцирование дважды по параметрам x_1, x_2, x_3 под знаком интеграла, является решением уравнения Лапласа.

2. Показать, что все тессеральные сферические функции второго порядка можно получить, дифференцируя $\frac{1}{R}$ дважды по направлениям координатных осей.

3. Показать, что тессеральные сферические функции можно получать, дифференцируя функцию $\frac{1}{R}$ $(n-m)$ раз по направлению x_3 и m раз по направлениям, лежащим в плоскости 1—2 под углом $\frac{\pi}{m}$ друг к другу.

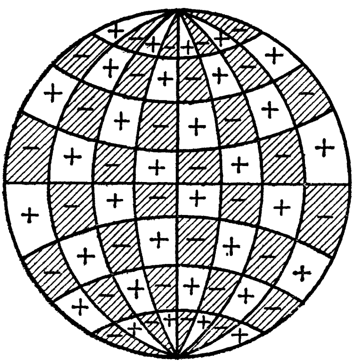

Рис. 39

4. Линии на шаровой поверхности, вдоль которых значение сферической функции равно нулю, называют *узловыми линиями* этой сферической функции.

а) Показать, что узловые линии полинома Лежандра $P_n(\cos\theta)$ представляют параллели, делящие шаровую поверхность на $(n+1)$ з о н, характеризуемых тем, что в каждой из зон $P_n(\cos\theta)$ сохраняет знак, а при переходе через узловую линию изменяет его на обратный.

б) Показать, что узловые линии тессеральных сферических функций $P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi$ и $P_{nm}(\cos\theta)\sin m\varphi$ образуются $n-m$ параллелями и m равноотстоящими меридианами, которые разбивают шаровую поверхность на клетки (tesserae), характеризуемые тем, что в каждой из них эти функции сохраняют знак и меняют его при пересечении границы клетки (узловой линии) (рис. 39).

§ 2. Ортогональность сферических функций

Покажем, что построенные в предыдущем параграфе сферические функции ортогональны на поверхности Σ любого шара с центром в начале координат, т. е. интеграл от произведения двух различных функций (19) по поверхности Σ равен нулю.

Начнем со сферических функций разных порядков. Пусть $Y_k(\theta, \varphi)$ и $Y_m(\theta, \varphi)$ $(k \neq m)$ — две такие функции. Функции

$$u_k = R^k Y_k(\theta, \varphi) \quad \text{и} \quad u_m = R^m Y_m(\theta, \varphi)$$

гармоничны в любой ограниченной окрестности начала координат. Действительно, они регулярны в любой конечной области, а согласно формуле (5) (при $B_n = 0$) удовлетворяют уравнению