ЗАДАЧИ

1. Показать, что интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x_3 + ix_1 \cos\zeta + ix_2 \sin\zeta,\ \zeta)\, d\zeta,$$

где $f(\xi, \zeta)$ — произвольная функция, допускающая дифференцирование дважды по параметрам x_1, x_2, x_3 под знаком интеграла, является решением уравнения Лапласа.

2. Показать, что все тессеральные сферические функции второго порядка можно получить, дифференцируя $\frac{1}{R}$ дважды по направлениям координатных осей.

3. Показать, что тессеральные сферические функции можно получать, дифференцируя функцию $\frac{1}{R}$ $(n-m)$ раз по направлению x_3 и m раз по направлениям, лежащим в плоскости 1—2 под углом $\frac{\pi}{m}$ друг к другу.

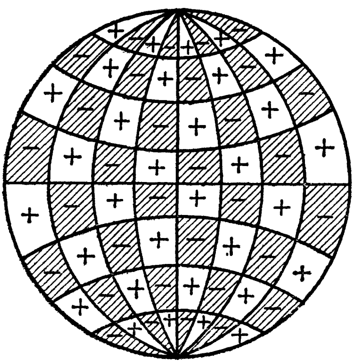

Рис. 39

4. Линии на шаровой поверхности, вдоль которых значение сферической функции равно нулю, называют *узловыми линиями* этой сферической функции.

а) Показать, что узловые линии полинома Лежандра $P_n(\cos\theta)$ представляют параллели, делящие шаровую поверхность на $(n+1)$ зон, характеризуемых тем, что в каждой из зон $P_n(\cos\theta)$ сохраняет знак, а при переходе через узловую линию изменяет его на обратный.

б) Показать, что узловые линии тессеральных сферических функций $P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi$ и $P_{nm}(\cos\theta)\sin m\varphi$ образуются $n-m$ параллелями и m равноотстоящими меридианами, которые разбивают шаровую поверхность на клетки (tesserae), характеризуемые тем, что в каждой из них эти функции сохраняют знак и меняют его при пересечении границы клетки (узловой линии) (рис. 39).

§ 2. Ортогональность сферических функций

Покажем, что построенные в предыдущем параграфе сферические функции ортогональны на поверхности Σ любого шара с центром в начале координат, т. е. интеграл от произведения двух различных функций (19) по поверхности Σ равен нулю.

Начнем со сферических функций разных порядков. Пусть $Y_k(\theta, \varphi)$ и $Y_m(\theta, \varphi)$ $(k \neq m)$ — две такие функции. Функции

$$u_k = R^k Y_k(\theta, \varphi) \quad \text{и} \quad u_m = R^m Y_m(\theta, \varphi)$$

гармоничны в любой ограниченной окрестности начала координат. Действительно, они регулярны в любой конечной области, а согласно формуле (5) (при $B_n = 0$) удовлетворяют уравнению

Лапласа. Поэтому в силу формулы Грина (7) гл. XIX:

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(u_k\frac{\partial u_m}{\partial n}-u_m\frac{\partial u_k}{\partial n}\right)dS=0.$$

В данном случае дифференцирование по нормали к Σ совпадает с дифференцированием по R, т. е. $\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial R}$. Поэтому

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(u_k\frac{\partial u_m}{\partial n}-u_m\frac{\partial u_k}{\partial n}\right)dS=\frac{1}{R}\iint\limits_{\Sigma}(ku_mu_k-mu_mu_k)\,dS=$$

$$=\frac{k-m}{R}\iint\limits_{\Sigma}u_mu_k\,dS=(k-m)\,R^{k+m-1}\iint\limits_{\Sigma}Y_m(\theta,\ \varphi)\,Y_k(\theta,\ \varphi)\,dS=0,$$

а так как $k\neq m$, то

$$\iint\limits_{\Sigma}Y_m(\theta,\ \varphi)\,Y_k(\theta,\ \varphi)\,dS=0\qquad(m\neq k).$$

Переходя к сферическим функциям (19) одного порядка, заметим, что интеграл по поверхности Σ можно представить в виде повторного интеграла, содержащего интегрирование по φ в пределах от 0 до 2π. Но в функции (19) одного порядка угол φ входит посредством множителей

$$1,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \cos2\varphi,\ \sin2\varphi,\ \ldots,\ \cos n\varphi,\ \sin n\varphi,$$

образующих в промежутке $(0,\ 2\pi)$ ортогональную систему. Поэтому интеграл в пределах от 0 до 2π от произведения любой пары из них равен нулю. Следовательно, равен нулю и интеграл по Σ.

Укажем без вывода интегралы от квадратов сферических функций:

$$\left.\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma}[P_n(\cos\theta)]^2\,dS=\frac{4\pi R^2}{2n+1},\\&\iint\limits_{\Sigma}[P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi]^2\,dS=\\&\quad=\iint\limits_{\Sigma}[P_{nm}(\cos\theta)\sin m\varphi]^2\,dS=\frac{2\pi R^2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!},\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

где R — радиус шаровой поверхности Σ.

Установим, наконец, интегральные формулы, содержащие произвольную сферическую функцию и полином Лежандра.

Пусть Σ, как и выше, шаровая поверхность с центром в начале координат, а $x(R_0,\ \theta_0,\ \varphi_0)$ — точка внутри Σ. Применив к гармонической функции

$$u_n(R,\ \theta,\ \varphi)=R^nY_n(\theta,\ \varphi)$$

формулу (44) гл. XIX, получим

$$u_n(R_0,\ \theta_0,\ \varphi_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_n}{\partial n}-u_n\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS,$$

где r — расстояние между точкой x и переменной точкой $\xi(R,\ \theta,\ \varphi)$ на Σ. В рассматриваемом случае:

$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial R},\qquad r=\sqrt{R^2+R_0^2-2RR_0\cos\gamma},$$

где γ — переменный угол между радиусами-векторами точек x и ξ. Разложим функцию $\frac{1}{r}$ в равномерно сходящийся ряд:

$$\frac{1}{r}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_0^k}{R^{k+1}}P_k(\cos\gamma)\qquad(R_0<R)$$

и заметим, что на Σ:

$$\frac{\partial u_n}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial R}R^nY_n(\theta,\ \varphi)=nR^{n-1}Y_n(\theta,\ \varphi),$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r}\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{R_0^k}{R^{k+2}}P_k(\cos\gamma).$$

В силу этих соотношений:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_n}{\partial n}-u_n\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=nR^nY_n(\theta,\ \varphi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_0^k}{R^{k+2}}P_k(\cos\gamma)+$$

$$+R^nY_n(\theta,\ \varphi)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{R_0^k}{R^{k+2}}P_k(\cos\gamma)=$$

$$=R^{n-2}Y_n(\theta,\ \varphi)\sum_{k=0}^{\infty}(n+k+1)\left(\frac{R_0}{R}\right)^kP_k(\cos\gamma).$$

Подставив это выражение в формулу Грина, получим:

$$u_n(R_0,\ \theta_0,\ \varphi_0)=R_0^nY_n(\theta_0,\ \varphi_0)=$$

$$=\frac{R^n}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\sum_{k=0}^{\infty}(n+k+1)\left(\frac{R_0}{R}\right)^kY_n(\theta,\ \varphi)P_k(\cos\gamma)\frac{ds}{R^2}.$$

Интегрируя почленно равномерно сходящийся ряд в правой части этого соотношения, придем к ряду

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^nY_n(\theta_0,\ \varphi_0)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\left(\frac{R_0}{R}\right)^k,\tag{21}$$

коэффициенты которого

$$C_k = \frac{n+k+1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma} Y_n(\theta,\ \varphi)\, P_k(\cos\gamma) \frac{ds}{R^2} \tag{22}$$

не зависят ни от R_0, ни от R, поскольку отношение $\frac{ds}{R^2}$ остается инвариантным при изменении R. Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях отношений $\frac{R_0}{R}$ в ряде (21) и приняв во внимание формулу (22), придем к формулам:

$$\left.\begin{aligned} &\iint\limits_{\Sigma} Y_n(\theta,\ \varphi)\, P_k(\cos\gamma)\, dS = 0 \qquad (n \neq k), \\ &\iint\limits_{\Sigma} Y_n(\theta,\ \varphi)\, P_n(\cos\gamma)\, dS = \frac{4\pi R^2}{2n+1} Y_n(\theta_0,\ \varphi_0). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

§ 3. Разложение по сферическим функциям

Пусть $f(\theta,\ \varphi)$ — функция, имеющая ограниченное изменение * на шаровой поверхности Σ единичного радиуса и абсолютно интегрируемая на Σ. Покажем, что в точках непрерывности она может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям:

$$f(\theta,\ \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta,\ \varphi). \tag{24}$$

Этот ряд иногда называют *рядом Лапласа*.

При доказательстве возможности разложения (24) будем опираться на теорему ** о разложении в ряд по полиномам Лежандра.

Если в промежутке $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$ функция $\psi(\gamma)\sin\gamma$ абсолютно интегрируема по γ, а функция $\psi(\gamma)$ имеет ограниченное изменение, то в любом интервале, лежащем внутри рассматриваемого промежутка и являющемся интервалом непрерывности функции $\psi(\gamma)$,

---

* Говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение в промежутке $(a,\ b)$ изменения x, если суммы $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} |f(x_{\alpha+1}) - f(x_\alpha)|$ остаются ограниченными, какими бы способами ни выбрать последовательность $x_1 = a,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1} = b$ возрастающих значений переменной x. В частности, функция $f(x)$ имеет в промежутке $(a,\ b)$ ограниченное изменение, когда удовлетворяются условия Дирихле: 1) промежуток $(a,\ b)$ можно разбить на конечное число промежутков, в каждом из которых функция $f(x)$ меняется монотонно, 2) в промежутке $(a,\ b)$ функция $f(x)$ или непрерывна или имеет конечное число разрывов первого рода. Когда функция зависит от нескольких переменных, изменяющихся в области V, то говорят, что она имеет ограниченное изменение в области V, если она имеет ограниченное изменение по каждой из этих переменных при любых фиксированных значениях остальных переменных.

** См., например, Гобсон [18], стр. 319. Аналогичная теорема справедлива и при меньших требованиях к $f(\theta,\ \varphi)$.