коэффициенты которого

$$C_k = \frac{n+k+1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma} Y_n(\theta,\ \varphi)\, P_k(\cos\gamma)\, \frac{ds}{R^2} \tag{22}$$

не зависят ни от R_0, ни от R, поскольку отношение $\frac{ds}{R^2}$ остается инвариантным при изменении R. Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях отношений $\frac{R_0}{R}$ в ряде (21) и приняв во внимание формулу (22), придем к формулам:

$$\left.\begin{aligned} &\iint\limits_{\Sigma} Y_n(\theta,\ \varphi)\, P_k(\cos\gamma)\, dS = 0 \qquad (n \neq k), \\ &\iint\limits_{\Sigma} Y_n(\theta,\ \varphi)\, P_n(\cos\gamma)\, dS = \frac{4\pi R^2}{2n+1}\, Y_n(\theta_0,\ \varphi_0). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

§ 3. Разложение по сферическим функциям

Пусть $f(\theta,\ \varphi)$ — функция, имеющая ограниченное изменение * на шаровой поверхности Σ единичного радиуса и абсолютно интегрируемая на Σ. Покажем, что в точках непрерывности она может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям:

$$f(\theta,\ \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta,\ \varphi). \tag{24}$$

Этот ряд иногда называют *рядом Лапласа*.

При доказательстве возможности разложения (24) будем опираться на теорему ** о разложении в ряд по полиномам Лежандра.

Если в промежутке $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$ функция $\psi(\gamma)\sin\gamma$ абсолютно интегрируема по γ, а функция $\psi(\gamma)$ имеет ограниченное изменение, то в любом интервале, лежащем внутри рассматриваемого промежутка и являющемся интервалом непрерывности функции $\psi(\gamma)$,

---

* Говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение в промежутке $(a,\ b)$ изменения x, если суммы $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} |f(x_{\alpha+1}) - f(x_\alpha)|$ остаются ограниченными, какими бы способами ни выбрать последовательность $x_1 = a,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1} = b$ возрастающих значений переменной x. В частности, функция $f(x)$ имеет в промежутке $(a,\ b)$ ограниченное изменение, когда удовлетворяются условия Дирихле: 1) промежуток $(a,\ b)$ можно разбить на конечное число промежутков, в каждом из которых функция $f(x)$ меняется монотонно, 2) в промежутке $(a,\ b)$ функция $f(x)$ или непрерывна или имеет конечное число разрывов первого рода. Когда функция зависит от нескольких переменных, изменяющихся в области V, то говорят, что она имеет ограниченное изменение в области V, если она имеет ограниченное изменение по каждой из этих переменных при любых фиксированных значениях остальных переменных.

** См., например, Гобсон [18], стр. 319. Аналогичная теорема справедлива и при меньших требованиях к $f(\theta,\ \varphi)$.

эта последняя может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по полиномам Лежандра*:

$$\psi(\gamma)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(\cos\gamma),$$

где

$$a_k=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}\psi(\gamma')\,P_k(\cos\gamma')\sin\gamma'\,d\gamma'.$$

Обозначим через θ', φ' координаты переменной точки на Σ, а через γ — угол между радиусами, проведенными из центра шаровой поверхности в точки (θ', φ') и (θ, φ).

Предположим сначала, что ряд (24) сходится и его можно почленно интегрировать. Умножив этот ряд на полином Лежандра $P_k(\cos\gamma)$ и интегрируя по Σ, в силу соотношений ортогональности (23) получим

$$\iint\limits_{\Sigma} f(\theta', \varphi')\,P_m(\cos\gamma)\,dS=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\iint\limits_{\Sigma} Y_k(\theta', \varphi')\,P_m(\cos\gamma)\,dS=\frac{4\pi}{2m+1}Y_m(\theta, \varphi),$$

откуда

$$Y_m(\theta, \varphi)=\frac{2m+1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma} f(\theta', \varphi')\,P_m(\cos\gamma)\,dS. \tag{25}$$

Введем новые сферические координаты (γ, ω) с полюсом в точке (θ, φ). Заметив, что

$$dS=\sin\gamma\,d\gamma\,d\omega,$$

перепишем соотношение (25) в виде

$$Y_m=\frac{2m+1}{2}\int_0^{\pi}P_m(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\gamma, \omega)\,d\omega=$$

$$=\frac{2m+1}{2}\int_0^{\pi}\Phi(\gamma)\,P_m(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma, \tag{26}$$

где

$$\Phi(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\gamma, \omega)\,d\omega$$

— среднее значение функции $f(\theta', \varphi')$ на окружности $\gamma=\text{cosnt}$ с центром в точке (θ, φ).

* В гл. XXXII рассмотрены разложения в ряды, сходящиеся к интегрируемой функции в среднем. Эта теория применима также к уравнению Лежандра.

Функция $\Phi(\gamma)$ имееет ограниченное изменение и абсолютно интегрируема, когда $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$. В самом деле, функция $f(\theta, \varphi)$ обладает этими свойствами по предположению, при усреднении же они, очевидно, сохраняются. Кроме того, функция $\Phi(\gamma)$ непрерывна в окрестности точки $\gamma = 0$, так как функция f непрерывна при $\gamma = 0$. Следовательно, в точке $\gamma = 0$ функция $\Phi(\gamma)$ может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра:

$$\Phi(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2} \int_{0}^{\pi} \Phi(\gamma) P_k(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma. \tag{27}$$

Здесь учтено, что $P_k(1) = 1$. Но согласно формуле (26) ряд в правой части формулы (27) равен $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Y_k$, где значения Y_k определены соотношением (25). С другой стороны, в силу непрерывности функции $f(\theta, \varphi)$, в точке θ, φ, для любого заданного положительного числа ε можно указать такое зависящее только от ξ число η, что при любом ω

$$|f(\gamma, \omega) - f(\theta, \varphi)| < \varepsilon, \text{ когда } \gamma < \eta, \ 0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi.$$

Так как значение $|\Phi(\gamma)|$ лежит между наибольшим и наименьшим значениями величины $|f(\gamma, \omega)|$ на окружности $\gamma = \text{const}$, то из предыдущего неравенства следует, что при $\gamma < \eta$

$$|\Phi(\gamma) - f(\theta, \varphi)| < \varepsilon.$$

Поскольку число ε сколь угодно мало́, то

$$\Phi(0) = f(\theta, \varphi).$$

Подставив полученные выражения в соотношение (27), получим разложение вида (24), что завершает доказательство.

Так как любая сферическая функция может быть представлена в виде линейной комбинации линейно-независимых ортогональных сферических функций, образующих систему (19), из доказанной теоремы вытекает *полнота* этой последней системы.

Представив каждую из сферических функций $Y_k(\theta, \varphi)$ в виде линейной формы от сферических функций системы (19):

$$Y_k(\theta, \varphi) = a_{0k} P_k(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{k} (a_{mk}\cos m\varphi + b_{mk}\sin m\varphi) P_{km}(\cos\theta) \tag{28}$$

и подставив эти выражения в соотношение (24), получим разложение произвольной функции $f(\theta, \varphi)$ по системе сферических функций (19):

$$f(\theta, \varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ a_{0k} P_k(\cos\theta) + \\ + \sum_{m=1}^{k} (a_{mk}\cos m\varphi + b_{mk}\sin m\varphi) P_{km}(\cos\theta) \Big\}. \tag{29}$$

Для читателя не представит затруднений с помощью формул (20) проверить, что коэффициенты ряда (29) определяются следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} a_{0k} &= \frac{2k+1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma} f(\theta', \varphi') P_k(\cos\theta')\, dS, \\ a_{mk} &= \frac{2k+1}{2\pi} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \iint\limits_{\Sigma} f(\theta', \varphi') P_{km}(\cos\theta') \cos m\varphi'\, dS, \\ b_{mk} &= \frac{2k+1}{2\pi} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \iint\limits_{\Sigma} f(\theta', \varphi') P_{km}(\cos\theta') \sin m\varphi'\, dS. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

ЗАДАЧА

Пусть γ — угол между радиусами, проведенными из центра шаровой поверхности Σ в точки (θ_0, φ_0) и (θ, φ) на Σ. Считая, что $\gamma = \gamma(\theta, \varphi)$, доказать следующее соотношение:

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta_0) + \sum_{k=0}^{n} 2\frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_{nk}(\cos\theta) P_{nk}(\cos\theta_0) \cos k(\varphi - \varphi_0),$$

известное как *теорема сложения для полиномов Лежандра.*

Указание. Следует разложить $P_n(\cos\gamma)$ в ряд (30) и при вычислении коэффициентов ряда воспользоваться формулами (23).

§ 4. Применение сферических функций для решения граничных задач

Рассмотрим приложение теории сферических функций к решению задач Дирихле и Неймана.

Пусть Σ — шаровая поверхность, определяемая в сферической системе координат R, θ, φ уравнением $R = R_0$, и $f(\theta, \varphi)$ — функция, заданная на Σ и разлагающаяся в ряд по сферическим функциям:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi). \quad (31)$$

Как мы знаем (§ 1), функция $\frac{Y_n(\theta, \varphi)}{R^{n+1}}$, а поэтому и отличающаяся от нее только постоянным множителем функция

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi)$$

гармонична в любой области, не содержащей точки $R = 0$. Поэтому функция

$$u(R, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{k+1} \qquad (R_0 \leqslant R) \quad (32)$$