Для читателя не представит затруднений с помощью формул (20) проверить, что коэффициенты ряда (29) определяются следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} a_{0k} &= \frac{2k+1}{4\pi}\iint_{\Sigma} f(\theta', \varphi')\, P_k(\cos\theta')\, dS, \\ a_{mk} &= \frac{2k+1}{2\pi}\,\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\iint_{\Sigma} f(\theta', \varphi')\, P_{km}(\cos\theta')\cos m\varphi'\, dS, \\ b_{mk} &= \frac{2k+1}{2\pi}\,\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\iint_{\Sigma} f(\theta', \varphi')\, P_{km}(\cos\theta')\sin m\varphi'\, dS. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

ЗАДАЧА

Пусть γ — угол между радиусами, проведенными из центра шаровой поверхности Σ в точки (θ_0, φ_0) и (θ, φ) на Σ. Считая, что $\gamma = \gamma(\theta, \varphi)$, доказать следующее соотношение:

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta)\, P_n(\cos\theta_0) + \sum_{k=0}^{n} 2\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\, P_{nk}(\cos\theta)\, P_{nk}(\cos\theta_0)\cos k(\varphi-\varphi_0),$$

известное как *теорема сложения для полиномов Лежандра.*

Указание. Следует разложить $P_n(\cos\gamma)$ в ряд (30) и при вычислении коэффициентов ряда воспользоваться формулами (23).

§ 4. Применение сферических функций для решения граничных задач

Рассмотрим приложение теории сферических функций к решению задач Дирихле и Неймана.

Пусть Σ — шаровая поверхность, определяемая в сферической системе координат R, θ, φ уравнением $R = R_0$, и $f(\theta, \varphi)$ — функция, заданная на Σ и разлагающаяся в ряд по сферическим функциям:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi). \qquad (31)$$

Как мы знаем (§ 1), функция $\frac{Y_n(\theta, \varphi)}{R^{n+1}}$, а поэтому и отличающаяся от нее только постоянным множителем функция

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi)$$

гармонична в любой области, не содержащей точки $R = 0$. Поэтому функция

$$u(R, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{k+1} \qquad (R_0 \leqslant R) \qquad (32)$$

гармонична вне шаровой поверхности Σ. А так как в силу соотношения (31) на Σ она совпадает с $f(\theta, \varphi)$, то она представляет решение внешней задачи Дирихле для области, лежащей вне шаровой поверхности Σ, при граничном условии $u|_{R=R_0} = f(\theta, \varphi)$.

Пользуясь теоремой Кельвина (гл. XIX, § 3), найдем, что функция

$$u(R, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi) \left(\frac{R}{R_0}\right)^k \qquad (R_0 \geqslant R) \tag{33}$$

гармонична внутри Σ, а поэтому представляет решение соответствующей внутренней задачи Дирихле при том же граничном условии.

Рассмотрим теперь функцию

$$u(R, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_0}{k+1} Y_k(\theta, \varphi) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{k+1}, \tag{34}$$

гармоническую в области вне Σ. Направление нормали внутрь Σ примем за положительное. При этом $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial R}$, так что нормальная производная функции $u(R, \theta, \varphi)$ на Σ равна

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{R=R_0} = -\left.\frac{\partial u}{\partial R}\right|_{R=R_0} = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi).$$

Таким образом, ряд (34) дает решение внешней задачи Неймана для области вне Σ при граничном условии $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{R=R_0} = f(\theta, \varphi)$.

Согласно § 4 гл. XIX внутренняя задача Неймана имеет решение только в том случае, если граничное условие $f(\theta, \varphi)$ удовлетворяет соотношению

$$\iint_{\Sigma} f(\theta', \varphi')\, dS = 0. \tag{35}$$

В силу ортогональности сферических функций разного порядка

$$\iint_{\Sigma} Y_k(\theta', \varphi')\, dS = \begin{cases} 4\pi R_0^2 Y_0 & \text{при} \quad k = 0, \\ 0 & \text{при} \quad k \neq 0, \end{cases}$$

где Y_0 — постоянная. Отсюда заключим, что для соблюдения требования (35) в разложении (31) должен отсутствовать член нулевого порядка, т. е. должно быть:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi). \tag{36}$$

В этом случае ряд

$$u(R, \theta, \varphi) = C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_0}{k} Y_k(\theta, \varphi) \left(\frac{R}{R_0}\right)^k \qquad (R_0 \geqslant R), \tag{37}$$

где C — произвольная постоянная, разрешает внутреннюю задачу Неймана для шара при граничном условии $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{R=R_0} = f(\theta, \varphi)$. Действительно, функция $u(R, \theta, \varphi)$ гармонична внутри Σ, а ее нормальная производная на Σ совпадает с $f(\theta, \varphi)$ (нормаль к Σ считаем направленной в область вне Σ).

ЗАДАЧИ

1. Найти решение внутренней задачи Дирихле в форме (33), исходя из интеграла Пуассона (51) гл. XIX.

Указание. Воспользоваться разложением:

$$\frac{1-h^2}{(1-2h\cos\theta+h^2)^{3/2}} = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\,h^k P_k(\cos\theta) \qquad (h<1).$$

2. Найти решение внутренней задачи Дирихле при граничном условии

$$u(R, \theta, \varphi)\,|_{R=R_0} = \sin 3\theta\cos\varphi.$$

Ответ:

$$u(R, \theta, \varphi) = \frac{8}{15}\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 P_{31}(\cos\theta) - \frac{1}{5}\,\frac{R}{R_0}\,P_{11}(\cos\theta)\cos\varphi.$$

3. Показать возможность решения смешанной краевой задачи для шаровой поверхности с помощью сферических функций.

4. Решить задачу Дирихле для области между двумя концентричными шаровыми поверхностями радиусов R_1 и R_2 при условии, что на первой шаровой поверхности искомое решение обращается в заданную функцию $f(\theta, \varphi)$, а на второй — в функцию $F(\theta, \varphi)$.

Ответ: Искомое решение дается системой равенств:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{k}\left[\left(A_{\beta k}R^k + B_{\beta k}\frac{1}{R^{k+1}}\right)\cos\beta\varphi + \right.$$
$$\left. + \left(C_{\beta k}R^k + D_{\beta k}\frac{1}{R^{k+1}}\right)\sin\beta\varphi\right] P_{k\beta}(\cos\theta),$$

$$A_{\beta k}R_1^k + B_{\beta k}\frac{1}{R_1^{k+1}} = a_{\beta k},$$

$$C_{\beta k}R_1^k + D_{\beta k}\frac{1}{R_1^{k+1}} = b_{\beta k},$$

$$A_{\beta k}R_2^k + B_{\beta k}\frac{1}{R_2^{k+1}} = \bar{a}_{\beta k},$$

$$C_{\beta k}R_2^k + D_{\beta k}\frac{1}{R_2^{k+1}} = \bar{b}_{\beta k},$$

где $a_{\beta k}$, $b_{\beta k}$ — коэффициенты разложения функции $f(\theta, \varphi)$ в ряд по сферическим функциям вида (29), а $\bar{a}_{\beta k}$, $\bar{b}_{\beta k}$ — коэффициенты разложения в тот же ряд функций $F(\theta, \varphi)$.

5. Решить предыдущую задачу в предположении, что функции f и F зависят только от угла θ.

Ответ:

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{A_k\left[\left(\frac{R}{R_2}\right)^k-\left(\frac{R_2}{R}\right)^{k+1}\right]+B_k\left[\left(\frac{R}{R_1}\right)^k-\left(\frac{R_1}{R}\right)^{k+1}\right]\right\}P_k(\cos\theta)\Bigg),$$

где

$$A_k=\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{k+1}}\int_0^{\pi} f(\theta')\,P_k(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta',$$

$$B_k=\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{k+1}}\int_0^{\pi} F(\theta')\,P_k(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'.$$

§ 5. Функция Грина задачи Дирихле для шара

Найдем с помощью сферических функций функцию Грина задачи Дирихле

$$\Delta u=f,\ \text{когда}\ x\in V-\mathcal{F}V,\qquad u=\psi,\ \text{когда}\ x\in\mathcal{F}V, \tag{38}$$

в частном случае, когда область V представляет шар или бесконечную область, расположенную вне некоторого шара.

Как мы знаем (§ 7, гл. XIX), функция Грина задачи Дирихле равна

$$G(\xi,\ x)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r(\xi,\ x)}+\varphi(\xi,\ x)\right], \tag{39}$$

где $r(\xi,\ x)$ — расстояние между точками ξ и x, а $\varphi(\xi,\ x)$ — решение граничной задачи (60) гл. XIX:

$$\Delta_{\xi}\varphi=0,\quad \text{когда}\quad \xi,\quad x\in V-\mathcal{F}V, \tag{40}$$

$$\varphi=-\frac{1}{r},\ \text{когда}$$

$$\xi\in\mathcal{F}V,\ x\in V-\mathcal{F}V. \tag{41}$$

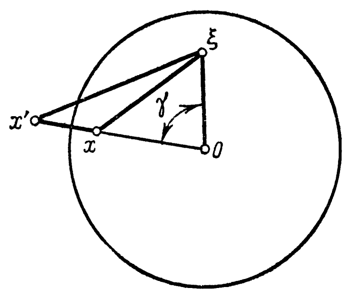

Рис. 40

Начнем с внутренней задачи, предположив, что область V — шар радиуса a. Обозначим через $|x|$ и $|\xi|$ расстояния точек x и ξ от центра шара, а через γ — угол между радиусами-векторами точек x и ξ (рис. 40) и разложим функцию $\varphi(\xi,\ x)$ в ряд по полиномам Лежандра:

$$\varphi(\xi,\ x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k R_k(\cos\gamma)\left(\frac{|x|\,|\xi|}{a^2}\right)^k\qquad (|x|<a,\ |\xi|\leqslant a).$$

Для определения величин b_k воспользуемся представлением функции

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{|x|^2+|\xi|^2-2|x|\,|\xi|\cos\gamma}}$$