Ответ:

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{A_k\left[\left(\frac{R}{R_2}\right)^k-\left(\frac{R_2}{R}\right)^{k+1}\right]+B_k\left[\left(\frac{R}{R_1}\right)^k-\left(\frac{R_1}{R}\right)^{k+1}\right]\right\}P_k(\cos\theta)\Big),$$

где

$$A_k=\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{k+1}}\int_0^{\pi}f(\theta')P_k(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta',$$

$$B_k=\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{k+1}}\int_0^{\pi}F(\theta')P_k(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'.$$

§ 5. Функция Грина задачи Дирихле для шара

Найдем с помощью сферических функций функцию Грина задачи Дирихле

$$\Delta u=f,\ \text{когда}\ x\in V-\mathscr{F}V,\qquad u=\psi,\ \text{когда}\ x\in\mathscr{F}V, \tag{38}$$

в частном случае, когда область V представляет шар или бесконечную область, расположенную вне некоторого шара.

Как мы знаем (§ 7, гл. XIX), функция Грина задачи Дирихле равна

$$G(\xi,\ x)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r(\xi,\ x)}+\varphi(\xi,\ x)\right], \tag{39}$$

где $r(\xi,\ x)$ — расстояние между точками ξ и x, а $\varphi(\xi,\ x)$ — решение граничной задачи (60) гл. XIX:

$$\Delta_{\xi}\varphi=0,\quad \text{когда}\quad \xi,\quad x\in V-\mathscr{F}V, \tag{40}$$

$$\varphi=-\frac{1}{r},\ \text{когда}$$

$$\xi\in\mathscr{F}V,\ x\in V-\mathscr{F}V. \tag{41}$$

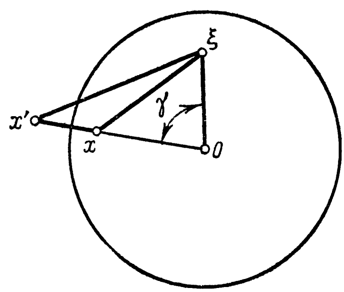

Рис. 40

Начнем с внутренней задачи, предположив, что область V — шар радиуса a. Обозначим через $|x|$ и $|\xi|$ расстояния точек x и ξ от центра шара, а через γ — угол между радиусами-векторами точек x и ξ (рис. 40) и разложим функцию $\varphi(\xi,\ x)$ в ряд по полиномам Лежандра:

$$\varphi(\xi,\ x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kR_k(\cos\gamma)\left(\frac{|x|\,|\xi|}{a^2}\right)^k\qquad(|x|<a,\ |\xi|\leqslant a).$$

Для определения величин b_k воспользуемся представлением функции

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{|x|^2+|\xi|^2-2|x|\,|\xi|\cos\gamma}}$$

в форме ряда по степеням отношений $\frac{|x|}{|\xi|}$. Согласно формуле (15) гл. XVI коэффициентами этого ряда будут величины

$$\frac{1}{|x|} P_n(\cos\gamma).$$

Поэтому, для случая, когда точка ξ лежит на поверхности $\mathcal{F}V$, получим:

$$\frac{1}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\gamma) \frac{|x|^k}{a^{k+1}} \qquad (\xi \in \mathcal{F}V).$$

Сравнив разложения для φ и $\frac{1}{r}$, заключим, что граничное условие (41) тождественно удовлетворяется, если положить:

$$b_k = \frac{1}{a}.$$

Следовательно,

$$\varphi(\xi, x) = -\frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\gamma) \left(\frac{|x||\xi|}{a^2}\right)^k.$$

Сравнив этот ряд с рядом (15) гл. XVI, найдем, что

$$\varphi = -\frac{1}{a\sqrt{1+\left(\frac{|x||\xi|}{a^2}\right)^2 - 2\frac{|x||\xi|}{a^2}\cos\gamma}} =$$

$$= -\frac{a}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{|x|}\right)^2 + |\xi|^2 - 2|\xi|\frac{a^2}{|x|}\cos\gamma}}.$$

Подставив это выражение в формулу (39), получим искомую *функцию Грина:*

$$G(\xi, x) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{a}{|x|} \cdot \frac{1}{r_1}\right), \tag{42}$$

где

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{a^2}{|x|}\right)^2 + |\xi|^2 - 2a^2\frac{|\xi|}{|x|}\cos\gamma}. \tag{43}$$

Легко видеть, что величина r_1 представляет расстояние от точки ξ до точки x', гармонически сопряженной (гл. XIX, § 3) с точкой x относительно поверхности $\mathcal{F}V$ рассматриваемого шара. Действительно, по определению гармонически сопряженных точек, точка x' лежит на том же луче, исходящем из центра шара, что и точка x, на расстоянии

$$|x'| = \frac{a^2}{|x|}$$

от центра (рис. 40). Составляя выражение для расстояния $|x'-\xi|$, как раз и получим формулу (43).

Для внешней задачи Дирихле вид выражения (42), определяющего функцию Грина, не меняется. Чтобы доказать это утверждение, достаточно показать, что по координатам точки ξ функция

$$-\frac{a}{|x|}\cdot\frac{1}{r_1}$$

гармонична в бесконечной области вне шара и удовлетворяет граничному условию (4). Первое ясно, так как r_1 есть расстояние от точки ξ, лежащей вне шара V или на его поверхности, до точки x', гармонически сопряженной с точкой x и, значит, лежащей внутри шара. Поэтому полюс функции $\frac{1}{r_1}$ лежит внутри шара, в силу чего в области вне шара она гармонична. Второе вытекает из формулы (43). Действительно, если точка ξ находится на поверхности шара, то $|x|=a$ и

$$r_1=\frac{a}{|x|}\sqrt{a^2+|x|^2-2|x||\xi|\cos\gamma}=a\frac{r}{|x|}.$$

Таким образом, формула (42) дает выражение функции Грина, разрешающей как внешнюю, так и внутреннюю задачи Дирихле для шара. При этом, в отличие от формул (32) и (33), с помощью функции Грина решение представляется в замкнутой форме и охватывает задачи Дирихле не только для уравнения Лапласа, но и Пуассона (см. § 7 гл. XIX).

ЗАДАЧА

Исходя из выражения (42) для функции Грина, вывести интегральную формулу Пуассона (51) гл. XIX.

§ 6. Функция Грина задачи Неймана для шара

Найдем теперь *функцию Грина внутренней задачи Неймана:*

$$\Delta u=0,\ \text{ когда } x\in V-\mathcal{F}V;\ \frac{du}{dn}=\psi,\ \text{ когда } x\in\mathcal{F}V,$$

когда область V является шаром. Представив функцию Грина в форме (39), для отыскания функции $\varphi(\xi, x)$ придем к граничной задаче, отличающейся от задачи (40—41) граничным условием:

$$\frac{d\varphi}{dn}=\frac{4\pi}{\bar{S}}-\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right),\ \text{ когда } \xi\in\mathcal{F}V,\ x\in V-\mathcal{F}V, \tag{44}$$

где $\bar{S}$ — площадь поверхности $\mathcal{F}V$.