от центра (рис. 40). Составляя выражение для расстояния $|x'-\xi|$, как раз и получим формулу (43).

Для внешней задачи Дирихле вид выражения (42), определяющего функцию Грина, не меняется. Чтобы доказать это утверждение, достаточно показать, что по координатам точки ξ функция

$$-\frac{a}{|x|}\cdot\frac{1}{r_1}$$

гармонична в бесконечной области вне шара и удовлетворяет граничному условию (4). Первое ясно, так как r_1 есть расстояние от точки ξ, лежащей вне шара V или на его поверхности, до точки x', гармонически сопряженной с точкой x и, значит, лежащей внутри шара. Поэтому полюс функции $\frac{1}{r_1}$ лежит внутри шара, в силу чего в области вне шара она гармонична. Второе вытекает из формулы (43). Действительно, если точка ξ находится на поверхности шара, то $|x|=a$ и

$$r_1=\frac{a}{|x|}\sqrt{a^2+|x|^2-2|x||\xi|\cos\gamma}=a\frac{r}{|x|}.$$

Таким образом, формула (42) дает выражение функции Грина, разрешающей как внешнюю, так и внутреннюю задачи Дирихле для шара. При этом, в отличие от формул (32) и (33), с помощью функции Грина решение представляется в замкнутой форме и охватывает задачи Дирихле не только для уравнения Лапласа, но и Пуассона (см. § 7 гл. XIX).

ЗАДАЧА

Исходя из выражения (42) для функции Грина, вывести интегральную формулу Пуассона (51) гл. XIX.

§ 6. Функция Грина задачи Неймана для шара

Найдем теперь *функцию Грина внутренней задачи Неймана:*

$$\Delta u=0,\ \text{когда}\ x\in V-\mathcal{F}V;\ \frac{du}{dn}=\psi,\ \text{когда}\ x\in\mathcal{F}V,$$

когда область V является шаром. Представив функцию Грина в форме (39), для отыскания функции $\varphi(\xi, x)$ придем к граничной задаче, отличающейся от задачи (40—41) граничным условием:

$$\frac{d\varphi}{dn}=\frac{4\pi}{\bar{S}}-\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right),\ \text{когда}\ \xi\in\mathcal{F}V,\ x\in V-\mathcal{F}V, \tag{44}$$

где $\bar{S}$ — площадь поверхности $\mathcal{F}V$.

Сохранив обозначения предыдущего параграфа, снова представим функцию $\varphi(\xi, x)$ в форме ряда по полиномам Лежандра:

$$\varphi(\xi, x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k(\cos\gamma)\left(\frac{|x|\,|\xi|}{a^2}\right)^k \qquad (|x|<a, \ |\xi|\leqslant a).$$

Заметив, что дифференцирование по внешней нормали к поверхности $\mathcal{F}V$ эквивалентно дифференцированию по $|\xi|$ и что $|\xi|=a$, если точка ξ лежит на $\mathcal{F}V$, получим

$$\frac{d\varphi}{dn}=\sum_{k=1}^{\infty} kb_k P_k(\cos\gamma)\frac{|x|^k}{a^{k+1}}, \text{ когда } \xi\in\mathcal{F}V.$$

Далее, согласно формуле (15) гл. XVI, при $|\xi|=a$:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{a^2+|x|^2-2a|x|\cos\gamma}}=\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\gamma)\frac{|x|^k}{a^{k+1}}, \text{ когда } \xi\in\mathcal{F}V,$$

откуда

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{d}{da}\left(\frac{1}{r}\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{a}P_k(\cos\gamma)\frac{|x|^k}{a^{k+1}}, \text{ когда } \xi\in\mathcal{F}V.$$

Подставив полученные выражения в граничное условие (44) и учтя, что в рассматриваемом случае $\bar{S}=4\pi a^2$, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(kb_k-\frac{k+1}{a}\right)P_k(\cos\gamma)\frac{|x|^k}{a^{k+1}}=-\frac{1}{a^2}.$$

Это соотношение удовлетворяется тождественно, если

$$b_k=\frac{k+1}{k}\,\frac{1}{a} \qquad (k>0). \tag{45}$$

Коэффициент b_0 может быть выбран произвольно. Приняв $b_0=\frac{1}{a}$, получим

$$\varphi=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos\gamma)\left(\frac{|x|\,|\xi|}{a^2}\right)^k+\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_k(\cos\gamma)}{k}\left(\frac{|x|\,|\xi|}{a^2}\right)^k. \tag{46}$$

Сравнив первый из этих рядов с рядом (15) гл. XVI, легко найдем, что

$$\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos\gamma)\left(\frac{|x|\,|\xi|}{a^2}\right)^k=\frac{a}{\sqrt{a^4+|x^2|\,|\xi|^2-2|x|\,|\xi|\,a^2\cos\gamma}}. \tag{47}$$

Второй из рядов, входящих в равенство (46), также легко может быть просуммирован. С этой целью разделим обе части равенства

$$\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos\gamma}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k P_k(\cos\gamma),$$

где $|\rho|<1$, на ρ и проинтегрируем по ρ получившиеся выражения. Приняв во внимание, что

$$\int\frac{d\rho}{\rho\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos\gamma}}=-\ln\frac{1}{2}\left(1-\rho\cos\gamma+\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos\gamma}\right)+C,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_k(\cos\gamma)}{k}\rho^k=-\ln\frac{1}{2}\left(1-\rho\cos\gamma+\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos\gamma}\right).$$

Подставив в качестве ρ отношение $\frac{|x||\xi|}{a^2}$, найдем, что

$$\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_k(\cos\gamma)}{k}\left(\frac{|x||\xi|}{a^2}\right)^2=$$
$$=\ln\frac{2a^2}{a^2-|x||\xi|\cos\gamma+\sqrt{a^4+|x|^2|\xi|^2-2a^2|x||\xi|\cos\gamma}}. \qquad (48)$$

Выражения (47) и (48) упрощаются, если ввести расстояние r_1 между точкой ξ и точкой x', гармонически сопряженной с точкой x относительно поверхности рассматриваемого шара. Тогда, как легко видеть, в силу формул (46), (47) и (48), получим

$$\varphi=\frac{a}{|x|r_1}+\frac{1}{a}\ln\frac{2a^2}{a^2+|x|r_1-|x||\xi|\cos\gamma}$$

и, в силу формулы (39), найдем, что

$$G(\xi,\ x)=\frac{1}{r}+\frac{a}{|x|r_1}+\frac{1}{a}\ln\frac{2a^2}{a^2+|x|r_1-|x||\xi|\cos\gamma}. \qquad (49)$$

Если точка ξ лежит на поверхности $\mathscr{F}V$, то, как мы видели в предыдущем параграфе

$$r_1=\frac{r}{|x|}a,$$

вследствие чего

$$G(\xi,\ x)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\ln\frac{2a}{a+r-|x|\cos\gamma}\right)=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\ln(a+r-|x|\cos\gamma)+\frac{\ln 2a}{a}\right],\ \text{когда}\ \xi\in\mathscr{F}V.$$

Внося это выражение в формулу (67) и принимая во внимание, что в силу формулы (35) гл. XIX

$$\iint_{\mathcal{F}V} \frac{du}{dn}\,dS=0,$$

получим решение задачи Неймана для шара в форме, найденной самим Нейманом из физических соображений:

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{F}V}\left[\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\ln(a+r-|x|\cos\gamma)\right]\psi\,dS. \qquad (50)$$

ЗАДАЧИ

1. Показать, что *функция Грина задачи Неймана*, поставленной в бесконечной области, лежащей вне некоторого шара, выражается соотношением:

$$G(\xi,\,x)=\frac{1}{r}+\frac{a}{|x|\,r_1}+\frac{1}{a}\ln\frac{(1-\cos\gamma)\,|x|\,|\xi|}{a^2+r_1\,|x|-|x|\,|\xi|\cos\gamma}.$$

Указание. Функцию φ, входящую в соотношение (40), разложить в ряд по полиномам Лежандра:

$$\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}a_kP_k(\cos\gamma)\left(\frac{a^2}{|x|\,|\xi|}\right)^{k+1},$$

воспользоваться граничным условием (44), а при суммировании рядов использовать формулу, получающуюся интегрированием равенства

$$\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos\gamma}}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos\gamma)\,\rho^k \quad (|\rho|<1).$$

2. Используя решение задачи 1, показать, что решение внешней задачи Неймана для шара V дается следующей *формулой Бьеркнеса:*

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{F}V}\left[\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\ln\frac{a+r-|x|\cos\gamma}{(1-\cos\gamma)\,|\xi|}\right]\psi\,dS.$$

Глава XXII

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Электростатический потенциал проводящего шара, разделенного слоем диэлектрика на два полушария

Предположим, что полый шар из проводника разделен слоем диэлектрика на два полушария: верхнее, заряженное до потенциала U_1, и нижнее, имеющее потенциал U_2. Требуется определить потенциал в любой точке электростатического поля. Задачу будем решать в сферических координатах (R, θ, φ), рас-