Внося это выражение в формулу (67) и принимая во внимание, что в силу формулы (35) гл. XIX

$$\iint_{\mathcal{F}V} \frac{du}{dn} dS = 0,$$

получим решение задачи Неймана для шара в форме, найденной самим Нейманом из физических соображений:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{F}V} \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \ln(a + r - |x| \cos\gamma)\right] \psi \, dS. \tag{50}$$

ЗАДАЧИ

1. Показать, что *функция Грина задачи Неймана*, поставленной в бесконечной области, лежащей вне некоторого шара, выражается соотношением:

$$G(\xi, x) = \frac{1}{r} + \frac{a}{|x| r_1} + \frac{1}{a} \ln \frac{(1 - \cos\gamma) |x| |\xi|}{a^2 + r_1 |x| - |x| |\xi| \cos\gamma}.$$

Указание. Функцию φ, входящую в соотношение (40), разложить в ряд по полиномам Лежандра:

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(\cos\gamma) \left(\frac{a^2}{|x| |\xi|}\right)^{k+1},$$

воспользоваться граничным условием (44), а при суммировании рядов использовать формулу, получающуюся интегрированием равенства

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho\cos\gamma}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\gamma) \rho^k \quad (|\rho| < 1).$$

2. Используя решение задачи 1, показать, что решение внешней задачи Неймана для шара V дается следующей *формулой Бьеркнеса:*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{F}V} \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \ln \frac{a + r - |x| \cos\gamma}{(1 - \cos\gamma) |\xi|}\right] \psi \, dS.$$

Глава XXII

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Электростатический потенциал проводящего шара, разделенного слоем диэлектрика на два полушария

Предположим, что полый шар из проводника разделен слоем диэлектрика на два полушария: верхнее, заряженное до потенциала U_1, и нижнее, имеющее потенциал U_2. Требуется определить потенциал в любой точке электростатического поля. Задачу будем решать в сферических координатах (R, θ, φ), расположив начало в центре шара и направив полярную ось перпендикулярно изолирующему слою.

Очевидно, что поставленная задача представляет задачу Дирихле для уравнения Лапласа при граничном условии

$$U\,|_{R=R_0}=\begin{cases} U_1 & \text{при} \quad 0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}, \\ U_2 & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi, \end{cases} \tag{1}$$

где $U=U\ (R,\ \theta,\ \varphi)$ — потенциал в точке $(R,\ \theta,\ \varphi)$, а R_0 — радиус шара (толщинами стенок шара и слоя диэлектрика пренебрегаем).

Решение этой задачи для точек внутри и вне шара дается разложениями (32) и (33) гл. XXI:

$$U=\sum_{k=0}^{\infty}Y_k(\theta,\ \varphi)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{k+1} \qquad (R_0\leqslant R), \tag{2}$$

$$U=\sum_{k=0}^{\infty}Y_k(\theta,\ \varphi)\left(\frac{R}{R_0}\right)^{k} \qquad (R_0\geqslant R). \tag{3}$$

Так как картина поля, очевидно, не зависит от координаты φ, то в формуле (28) гл. XXI следует положить $a_{mk}=0$ при $m\neq0$, что даст

$$Y_n(\theta,\ \varphi)=a_nP_n(\cos\theta).$$

Сравнив теперь разложения

$$U=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\frac{R_0}{R}\right)^{k+1}P_k(\cos\theta) \qquad (R_0\leqslant R) \tag{4}$$

и

$$U=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\frac{R}{R_0}\right)^{k}P_k(\cos\theta) \qquad (R_0\geqslant R) \tag{5}$$

с разложением (7) гл. XVI, на основании формулы (8) гл. XVI найдем выражения для коэффициентов a_n:

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)\,P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta, \tag{6}$$

где $f(\theta)$ — значение функции U на поверхности шара. Подставив граничное условие, получим:

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\left\{\int_0^{\pi/2}U_1P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}U_2P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\right\}=$$

$$=\frac{2n+1}{2}\left\{U_1\int_0^1P_n(x)\,dx+U_2\int_{-1}^{0}P_n(x)\,dx\right\}.$$

Так как полином Лежандра $P_n(x)$ имеет одинаковую четность с индексом n, т. е.

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x),$$

то

$$a_n = \frac{2n+1}{2} [U_1 + (-1)^n U_2] \int_0^1 P_n(x)\, dx.$$

Воспользуемся формулой (задача 1 гл. XVI):

$$\int_0^1 P_n(x)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n = 2k,\ k > 0, \\ (-1)^k \dfrac{(2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} & \text{при } n = 2k+1. \end{cases}$$

Из нее вытекает, что

$$a_0 = \frac{U_1 + U_2}{2}, \quad a_{2k} = 0,$$

$$a_{2k+1} = \frac{U_1 - U_2}{2^{2k+1}} (-1)^k \frac{(2k)!}{k!\, (k+1)!} (4k+3).$$

Подставив найденные значения коэффициентов a_n в разложения (4) и (5), мы и найдем искомый потенциал электростатического поля:

$$U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)\frac{R_0}{R} + \frac{1}{2}(U_1 - U_2)\left[\frac{3}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 P_1(\cos\theta) - \right.$$
$$\left. - \frac{7}{8}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4 P_3(\cos\theta) + \ldots\right] \qquad (R_0 \leqslant R). \qquad (7)$$

$$U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) + \frac{1}{2}(U_1 - U_2)\left[\frac{3}{2}\left(\frac{R}{R_0}\right) P_1(\cos\theta) - \right.$$
$$\left. - \frac{7}{8}\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \ldots\right] \qquad (R_0 \geqslant R). \qquad (8)$$

§ 2. Задача о стационарном распределении температуры в шаре

Предположим, что нам дан металлический шар с закопченной поверхностью, подвергающийся действию солнечных лучей в воздухе, температуру которого примем для простоты равной нулю; требуется определить установившуюся температуру внутренних точек шара (рис. 41).

Из § 1 гл. XIX известно, что искомая температура должна удовлетворять уравнению Лапласа. Что же касается граничного условия на поверхности шара, то оно будет следующим:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial R}\right|_{R=R_0} = -p\,[u - f(\theta)]\Big|_{R=R_0}, \qquad (9)$$