Так как полином Лежандра $P_n(x)$ имеет одинаковую четность с индексом $n$, т. е.

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x),$$

то

$$a_n = \frac{2n+1}{2} [U_1 + (-1)^n U_2] \int_0^1 P_n(x)\, dx.$$

Воспользуемся формулой (задача 1 гл. XVI):

$$\int_0^1 P_n(x)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n = 2k,\ k > 0, \\ (-1)^k \dfrac{(2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} & \text{при } n = 2k+1. \end{cases}$$

Из нее вытекает, что

$$a_0 = \frac{U_1 + U_2}{2}, \quad a_{2k} = 0,$$

$$a_{2k+1} = \frac{U_1 - U_2}{2^{2k+1}} (-1)^k \frac{(2k)!}{k!\,(k+1)!} (4k+3).$$

Подставив найденные значения коэффициентов $a_n$ в разложения (4) и (5), мы и найдем искомый потенциал электростатического поля:

$$U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)\frac{R_0}{R} + \frac{1}{2}(U_1 - U_2)\left[\frac{3}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 P_1(\cos\theta) - \right.$$
$$\left. - \frac{7}{8}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4 P_3(\cos\theta) + \ldots\right] \qquad (R_0 \leqslant R). \qquad (7)$$

$$U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) + \frac{1}{2}(U_1 - U_2)\left[\frac{3}{2}\left(\frac{R}{R_0}\right) P_1(\cos\theta) - \right.$$
$$\left. - \frac{7}{8}\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \ldots\right] \qquad (R_0 \geqslant R). \qquad (8)$$

## § 2. Задача о стационарном распределении температуры в шаре

Предположим, что нам дан металлический шар с закопченной поверхностью, подвергающийся действию солнечных лучей в воздухе, температуру которого примем для простоты равной нулю; требуется определить установившуюся температуру внутренних точек шара (рис. 41).

Из § 1 гл. XIX известно, что искомая температура должна удовлетворять уравнению Лапласа. Что же касается граничного условия на поверхности шара, то оно будет следующим:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial R}\right|_{R=R_0} = -p\,[u - f(\theta)]\Big|_{R=R_0}, \qquad (9)$$

где $R_0$ — радиус шара, $p=\frac{h}{\gamma}$ — отношение коэффициентов теплоотдачи и внутренней теплопроводности, а $f(\theta)$ — температура поверхности шара, которая наблюдалась бы в том случае, если бы отсутствовало лучеиспускание с поверхности в окружающий воздух.

Если принять, что *степень нагревания пропорциональна синусу угла падения лучей на поверхность*, то очевидно, что *функция*

$$f(\theta)=\begin{cases} A\cos\theta \text{ при } 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ при } \frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi, \end{cases} \tag{10}$$

где $A$ — постоянная величина, зависящая от интенсивности солнечной радиации.

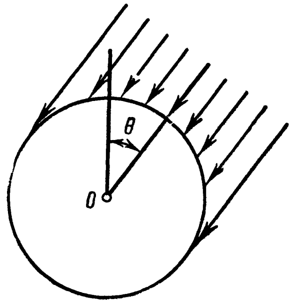


*Рис. 41*

Будем разыскивать решение поставленной задачи в форме бесконечного ряда

$$u=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(\frac{R}{R_0}\right)^k P_k(\cos\theta) \qquad (R_0\geqslant R) \tag{11}$$

с неопределенными пока коэффициентами $a_k$.

Вносся выражение (11) в соотношение (9) и разлагая функцию $f(\theta)$ в ряд по полиномам Лежандра:

$$f(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k(\cos\theta), \tag{12}$$

где, согласно формуле (8) гл. XVI,

$$b_k=\frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)\,P_k(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta, \tag{13}$$

получим равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k\left(\frac{k}{R_0}+p\right)-pb_k\right]P_k(\cos\theta)=0,$$

которое удовлетворяется тождественно, если коэффициенты

$$a_k=\frac{pR_0}{k+pR_0}\,b_k. \tag{14}$$

Теперь остается вычислить числа $b_k$, что легко сделать, если воспользоваться формулами (10) и (13). В самом деле, из этих формул вытекает, что

$$b_k=\frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi/2} A\cos\theta\,P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{2k+1}{2}\,A\int_0^1 P_k(x)\,x\,dx,$$

откуда непосредственным вычислением получим:

$$b_0 = \frac{A}{2} \int\limits_0^1 x\,dx = \frac{A}{4},$$

$$b_1 = \frac{3}{2} A \int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{A}{2}.$$

С другой стороны, в гл. XVI о полиномах Лежандра было указано, что

$$\int\limits_0^1 xP_k(x)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 2n+1 \quad (n > 0), \\ \dfrac{(-1)^n (2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!\,(n+1)!} \text{ при } k = 2n \quad (n > 0), \end{cases}$$

откуда вытекает, что

$$b_{2k+1} = 0 \quad (k > 0),$$

$$b_{2k} = (-1)^k A \frac{(2k-2)!\,(4k+1)}{2^{2k+1}(k-1)!\,(k+1)!} \quad (k > 0).$$

Следовательно,

$$a_0 = \frac{A}{4}, \quad a_1 = \frac{A}{2} \frac{pR_0}{pR_0+1},$$

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = (-1)^k A \frac{pR_0}{pR_0+1} \frac{(2k-2)!\,(4k+1)}{2^{2k+1}(k-1)!\,(k+1)!} \quad (k > 0).$$

Внося найденные значения коэффициентов $a_k$ в разложение (11), получим искомую температуру шара в виде следующего бесконечного ряда:

$$u = pAR_0 \left[ \frac{1}{4pR_0} + \frac{1}{pR_0+1} \frac{1}{2} \frac{R}{R_0} P_1(\cos\theta) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{pR_0+2} \frac{5}{16} \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 P_2(\cos\theta) + \ldots \right], \tag{15}$$

где $R_0 \geqslant R$.

## § 3. Задача о распределении электричества на индуктивно заряженном шаре

Применим теорию сферических функций к решению следующей электростатической задачи.

Допустим, что имеется некоторое тело $B$ из диэлектрика, причем объемная плотность

$$\rho = f(R_2, \theta_2, \varphi_2) \tag{16}$$

электрических зарядов, распределенных в теле, представляет собою известную нам функцию от координат точки $x$ (рис. 42).