откуда непосредственным вычислением получим:

$$b_0 = \frac{A}{2} \int_0^1 x\,dx = \frac{A}{4},$$

$$b_1 = \frac{3}{2} A \int_0^1 x^2\,dx = \frac{A}{2}.$$

С другой стороны, в гл. XVI о полиномах Лежандра было указано, что

$$\int_0^1 x P_k(x)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 2n+1 \quad (n > 0), \\ \dfrac{(-1)^n (2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!\,(n+1)!} \text{ при } k = 2n \quad (n > 0), \end{cases}$$

откуда вытекает, что

$$b_{2k+1} = 0 \quad (k > 0),$$

$$b_{2k} = (-1)^k A \frac{(2k-2)!\,(4k+1)}{2^{2k+1}(k-1)!\,(k+1)!} \quad (k > 0).$$

Следовательно,

$$a_0 = \frac{A}{4}, \quad a_1 = \frac{A}{2} \frac{pR_0}{pR_0+1},$$

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = (-1)^k A \frac{pR_0}{pR_0+1} \frac{(2k-2)!\,(4k+1)}{2^{2k+1}(k-1)!\,(k+1)!} \quad (k > 0).$$

Внося найденные значения коэффициентов a_k в разложение (11), получим искомую температуру шара в виде следующего бесконечного ряда:

$$u = pAR_0 \left[\frac{1}{4pR_0} + \frac{1}{pR_0+1} \frac{1}{2} \frac{R}{R_0} P_1(\cos\theta) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{pR_0+2} \frac{5}{16} \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 P_2(\cos\theta) + \ldots \right], \quad (15)$$

где $R_0 \geqslant R$.

§ 3. Задача о распределении электричества на индуктивно заряженном шаре

Применим теорию сферических функций к решению следующей электростатической задачи.

Допустим, что имеется некоторое тело B из диэлектрика, причем объемная плотность

$$\rho = f(R_2, \theta_2, \varphi_2) \quad (16)$$

электрических зарядов, распределенных в теле, представляет собою известную нам функцию от координат точки x (рис. 42).

Допустим далее, что вблизи тела B помещается шаровой проводник C, имеющий некоторый заряд q. Вследствие индукции на этом проводнике распределится непрерывным образом некоторый электрический слой. Поставим себе задачей определить плотность ρ_1 этого слоя в любой точке $\zeta(R_0, \theta_1, \varphi_1)$, лежащей на поверхности проводника. С этой целью обозначим через U потенциал электростатического поля в какой-нибудь точке $\xi(R, \theta, \varphi)$,

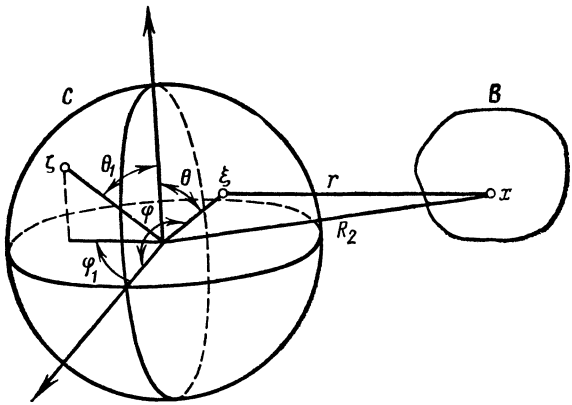

Рис. 42

находящейся *внутри* проводника. Этот потенциал может быть представлен в виде суммы:

$$U = U_B + U_C, \tag{17}$$

где через U_B обозначен потенциал, получающийся от присутствия заряда в теле B, а через U_C — потенциал, вызываемый тем зарядом, который индуцируется на поверхности проводника.

Обратимся сначала к определению потенциала U_B. Из § 1 гл. XIX известно, что этот потенциал определяется формулой:

$$U_B = \iiint\limits_{(B)} \frac{\rho}{r} \, dV,$$

где через r обозначено расстояние от точки $\xi(R, \theta, \varphi)$ до переменной точки $x(R_2, \theta_2, \varphi_2)$ тела B. Отсюда вытекает, что

$$U_B = \iiint\limits_{(B)} \frac{f(R_2, \theta_2, \varphi_2) R_2^2 \sin\theta_2 \, dR_2 d\theta_2 d\varphi_2}{\sqrt{R^2 + R_2^2 - 2RR_2 \cos\gamma}},$$

где

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_2 + \sin\theta \sin\theta_2 \cos(\varphi - \varphi_2).$$

Взяв теперь разложение (гл. XVI, § 5):

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + R_2^2 - 2RR_2 \cos\gamma}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\gamma) \frac{R^k}{R_2^{k+1}} \quad (R_2 > R),$$

можем представить потенциал U_B в виде бесконечного ряда

$$U_B=\sum_{k=0}^{\infty} X_k(\theta,\ \varphi) R^k, \tag{18}$$

где ради краткости положено:

$$X_k(\theta,\ \varphi)=\iiint\limits_{(B)} f(R_2,\ \theta_2,\ \varphi_2)\, P_k(\cos\gamma)\sin\theta_2 \frac{dR_2 d\theta_2 d\varphi_2}{R_2^{k-1}}\,. \tag{19}$$

Так как по условию $f(R_2,\ \theta_2,\ \varphi_2)$ представляет собой функцию, известную во всем объеме B, то очевидно, что функции $X_k(\theta,\ \varphi)$ вполне определяются формулой (19).

Обратимся теперь к нахождению потенциала U_C. Обозначим через

$$\rho_1=f_1(\theta_1,\ \varphi_1) \tag{20}$$

искомую плотность слоя на поверхности проводника. Тогда потенциал электрического слоя в точке $\xi(R,\ \theta,\ \varphi)$ определится формулой

$$U_C=\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f_1(\theta_1,\ \varphi_1)\, R_0^2 \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1}{\sqrt{R^2+R_0^2-2RR_0\cos\gamma_1}}\,,$$

где

$$\cos\gamma_1=\cos\theta\cos\theta_1+\sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi-\varphi_1).$$

Отсюда вытекает, что потенциал U_C может быть представлен в виде следующего бесконечного ряда:

$$U_C=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R^k}{R_0^{k-1}}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1(\theta_1,\ \varphi_1)\, P_k(\cos\gamma_1)\sin\theta_1\, d\theta_1 d\varphi_1. \tag{21}$$

Допустим теперь, что функция $f_1(\theta_1,\ \varphi_1)$ разложена в ряд по сферическим функциям:

$$f_1(\theta_1,\ \varphi_1)=\sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta_1,\ \varphi_1). \tag{22}$$

Очевидно, что определив функции $Y_k(\theta_1,\ \varphi_1)$, мы найдем, согласно формуле (20), искомую плотность электрического слоя. Для нахождения этих функций внесем разложение (22) в формулу (21). Тогда, вспоминая интегральные соотношения (23) гл. XXI, получим разложение:

$$U_C=4\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Y_k(\theta,\ \varphi)}{2k+1}\,\frac{R^k}{R_0^{k-1}}\,, \tag{23}$$

из которого, в силу формул (17) и (18), вытекает, что

$$U=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{X_k(\theta,\ \varphi)+\frac{4\pi}{R_0^{k-1}}\,\frac{Y_k(\theta,\ \varphi)}{2k+1}\right\}R^k.$$

Но нам известно, что потенциал U имеет *постоянное* значение внутри проводника; следовательно, правая часть найденного разложения должна быть независимой от R, что возможно лишь при выполнении равенств:

$$X_k(\theta,\ \varphi)+\frac{4\pi}{R_0^{k-1}}\,\frac{Y_k(\theta,\varphi)}{2k+1}=0 \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Эти равенства определяют функции Y_1, Y_2, ... и т. д. следующим образом:

$$Y_k(\theta_1,\ \varphi_1)=-\frac{2k+1}{4\pi}X_k(\theta_1,\ \varphi_1)\,R_0^{k-1} \qquad (k\geqslant 1). \tag{24}$$

Теперь нам остается определить лишь функцию

$$Y_0(\theta_1,\ \varphi_1),$$

для чего достаточно сравнить между собой коэффициенты при R_0 в правых частях разложений (21) и (23). В результате такого сравнения получим

$$Y_0(\theta,\ \varphi)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\theta_1,\ \varphi_1)\,P_0(\cos\gamma_1)\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1,$$

откуда найдем, что

$$Y_0(\theta,\ \varphi)=\frac{1}{4\pi R_0^2}\iint\limits_{\Sigma}\rho_1\,d\Sigma, \tag{25}$$

где Σ — поверхность шара $R=R_0$. Принимая затем во внимание, что

$$\iint\limits_{\Sigma}\rho_1\,d\Sigma=q,$$

где q, как было упомянуто выше, обозначает полный заряд проводника, найдем искомую функцию Y_0:

$$Y_0(\theta_1,\ \varphi_1)=\frac{q}{4\pi R_0^2}. \tag{26}$$

Внося найденные нами значения сферических функций в разложение (22), получим следующее выражение плотности слоя:

$$\rho_1=\frac{q}{4\pi R_0^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}X_k(\theta_1,\ \varphi_1)\,R_0^{k-1}, \tag{27}$$

где функции $X_k(\theta_1,\ \varphi_1)$ определяются на основании формулы (19).

Формула (27) показывает, что плотность электрического слоя, распределенного на поверхности сферического проводника, состоит из двух частей:

1) из плотности

$$\frac{q}{4\pi R_0^2},$$

представляющей собой плотность заряда q, равномерно распределенного по всей поверхности шара так, как будто бы внешние электрические силы отсутствуют;

2) из плотности

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}X_k(\theta_1, \varphi_1)R_0^{k-1},$$

индуцированной зарядами тела B.

Остановимся более подробно на частном случае формулы (27), когда вместо заряженного тела имеется точечный заряд q_0, индуцирующий электрический заряд на шаре C.

Обозначим по-прежнему через $\xi(R, \theta, \varphi)$ какую-нибудь точку внутри шара C, а через R_2, θ_2, φ_2—сферические координаты точки x, в которой сосредоточен заряд q_0. Тогда будем иметь

$$U_B=\frac{q_0}{\sqrt{R^2+R_2^2-2RR_2\cos\gamma}}=\frac{q_0}{R_2}\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos\gamma)\left(\frac{R}{R_2}\right)^k, \tag{28}$$

где

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_2+\sin\theta\sin\theta_2\cos(\varphi-\varphi_2).$$

Сравнив это разложение с формулой (18), найдем, что

$$X_k(\theta, \varphi)=q_0\frac{P_k(\cos\gamma)}{R_2^{k+1}}.$$

Подставив теперь последнее выражение в формулу (27), получим следующий результат:

$$\rho_1=\frac{q}{4\pi R_0^2}-\frac{q_0}{4\pi R_2R_0}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)P_k(\cos\gamma_2)\left(\frac{R_0}{R_2}\right)^k,$$

где

$$\cos\gamma_2=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2).$$

Но при помощи дифференцирования по R разложения (28) нетрудно доказать справедливость такого рода равенства:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)P_k(\cos\gamma_2)\left(\frac{R_0}{R_2}\right)^k=\frac{R_2(R_2^2-R_0^2)}{(R_2^2+R_0^2-2R_2R_0\cos\gamma_2)^{3/2}}-1,$$

откуда уже окончательно вытекает следующая формула для искомой плотности ρ_1:

$$\rho_1=\frac{q}{4\pi R_0^2}+\frac{q_0}{4\pi R_2R_0}\left[1-\frac{R_2(R_2^2-R_0^2)}{(R_2^2+R_0^2-2R_2R_0\cos\gamma_2)^{3/2}}\right], \tag{29}$$

где $\cos\gamma_2$ определяется по вышеуказанной формуле.