§ 4. Обтекание шара потоком несжимаемой жидкости

Допустим, что мы имеем дело с незавихренным потоком несжимаемой жидкости, которая, двигаясь поступательным образом, обтекает на своем пути шар радиуса R_0. Скорость жидкости на бесконечном удалении от шара будем считать равной постоянному значению v_0. Вблизи шара жидкость приобретает некоторую дополнительную скорость, потенциал которой обозначим через u. Имея в виду определить этот потенциал, поместим начало сферической системы координат в центр шара и направим полярную ось в сторону, противоположную движению (рис. 43).

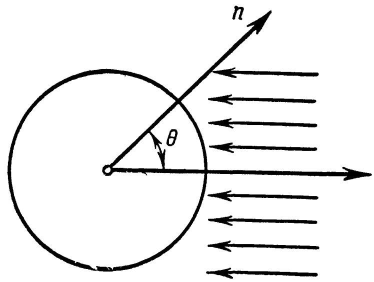

Рис. 43

Из главы XIX нам известно, что потенциал скорости несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа. Будем разыскивать интеграл этого уравнения в форме бесконечного ряда:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(\cos\theta) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{k+1} \qquad (R_0 < R), \tag{30}$$

где $P_k(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра. Коэффициенты a_k этого ряда могут быть определены из условий, имеющих место на границе жидкой среды. В самом деле, из рис. 43 видно, что нормальная составляющая дополнительной скорости частицы жидкости на поверхности шара выражается формулой

$$AB = v_0 \cos(\pi - \theta) = -v_0 \cos\theta,$$

откуда вытекает, что

$$\left.\frac{\partial u}{\partial R}\right|_{R=R_0} = -v_0 \cos\theta.$$

Внося сюда на место u правую часть разложения (30), найдем, что

$$-\frac{1}{R_0}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\, a_k P_k(\cos\theta) = -v_0\cos\theta.$$

Но это последнее равенство обращается в тождество только в том случае, когда коэффициенты a_k будут выбраны следующим образом:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -\frac{R_0 v_0}{2}, \quad a_2 = a_3 = \ldots = 0.$$

Внося эти значения коэффициентов в разложение (30), найдем искомый потенциал в форме, указанной Стоксом, а именно:

$$u = \frac{v_0 R_0^3}{2R^2} \cos\theta.$$

ЗАДАЧИ

1. Найти ньютоновский потенциал в точке $x(R, \theta, \varphi)$ поля, созданного притягивающими массами, которые расположены так, что они образуют тонкий диск радиуса R_0.

Ответ: Искомый потенциал выражается формулами:

$$U = \frac{2m}{R_0}\left[P_0(\cos\theta) - \frac{R}{R_0}P_1(\cos\theta) + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 P_2(\cos\theta) - \right.$$

$$\left. - \frac{1\cdot 2}{2\cdot 4}\left(\frac{R}{R_0}\right)^4 P_4(\cos\theta) + \ldots\right] \left(R < R_0,\ \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U = \frac{2m}{R_0}\left[\frac{1}{2}\frac{R_0}{R}P_1(\cos\theta) - \frac{1\cdot 2}{2\cdot 4}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 P_2(\cos\theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{R_0}{R}\right) P_4(\cos\theta) - \ldots\right] \quad (R_0 > R),$$

где m — масса притягивающего слоя.

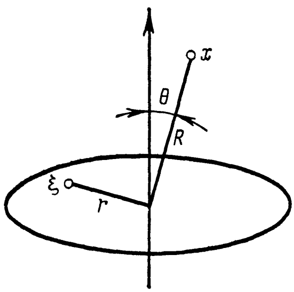

Рис. 44

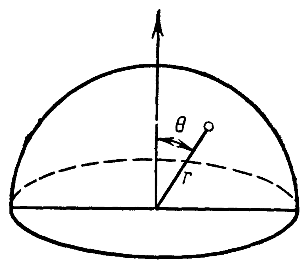

Рис. 45

2. Тонкий диск радиуса R_0 заряжен q единицами электричества. Найти потенциал поля в точке $x(R, \theta, \varphi)$, зная, что плотность электричества в точке ξ (рис. 44) изменяется по закону:

$$\rho = \frac{E}{4\pi R_0 \sqrt{R_0^2 - r^2}}.$$

Ответ: Потенциал в точке x выражается формулами:

$$U = \frac{E}{R_0}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{R}{R_0}P_1(\cos\theta) + \frac{1}{3}\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 P_3(\cos\theta) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{5}\left(\frac{R}{R_0}\right)^5 P_5(\cos\theta) + \ldots\right] \quad \left(R < R_0,\ \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U = \frac{E}{R_0}\left[\frac{R_0}{R} - \frac{1}{3}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 P_2(\cos\theta) + \frac{1}{5}\left(\frac{R_0}{R}\right)^5 P_4(\cos\theta) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{7}\left(\frac{R_0}{R}\right)^7 P_6(\cos\theta) + \ldots\right] \quad (R > R_0)$$

3. Найти стационарную температуру точек, лежащих внутри полусферы, если во все время наблюдения сферическая поверхность имеет постоянную температуру T_0, а основание полусферы — температуру 0° (рис. 45).

Указание. Обозначив через $f(\theta)$ температуру поверхности, получим

$$f(\theta)=\begin{cases} T_0 \text{ при } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \quad \text{при } \theta=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Продолжив затем функцию $f(\theta)$ на интервал $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ по правилу

$$f(\pi-\theta)=-f(\theta)=-T_0 \qquad \left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right),$$

определим коэффициенты a_{2k+1} в разложении

$$T_0=a_1P_1(\cos\theta)+a_3P_3(\cos\theta)+\ldots+a_{2k+1}P_{2k+1}(\cos\theta)+\ldots \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

по формуле:

$$a_{2k+1}=\frac{4k+3}{2}\left[T_0\int\limits_0^{\pi/2}P_{2k+1}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta-T_0\int\limits_{\pi/2}^{\pi}P_{2k+1}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\right].$$

Ответ: Искомая температура выражается разложением

$$T=T_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(4k+3)1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k+2)}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{2k+1}\times$$

$$\times P_{2k+1}(\cos\theta)\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

4. Проводящий шар радиуса R_0 соединен с землей и помещен в электростатическое поле, образованное точечным зарядом q_0, находящимся в точке x

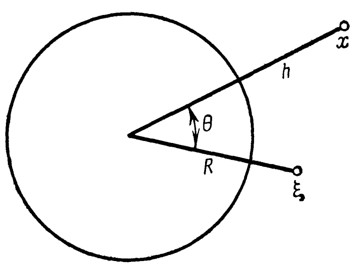

Рис. 46

на расстоянии $h>R_0$ от центра шара (рис. 46). Определить потенциал в точке $\xi(R,\ \theta,\ \varphi)$ от заряда, индуктированного на поверхности шара.

Указание. Представив искомый потенциал в виде суммы:

$$U=U_B+U_C=\frac{q_0}{\sqrt{h^2+R^2-2hR\cos\theta}}+U_C,$$

где

$$U_C=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\frac{R}{R_0}\right)^kP_k(\cos\theta) \qquad (R<R_0)$$

и

$$U_C = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{R_0}{R}\right)^{k+1} P_k(\cos\theta) \qquad (R > R_0),$$

следует определить коэффициент a_k из условия заземления: $U_B + U_C = 0$ на поверхности шара.

Ответ: Искомый потенциал представляется выражениями:

$$U = U_B - \frac{q_0}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{h}\right)^k P_k(\cos\theta) = 0 \quad (R < R_0),$$

$$U = U_B - \frac{q_0 R_0}{hR} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R_0^2}{hR}\right)^k P_k(\cos\theta) \qquad (R > R_0).$$

Глава XXIII *

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

§ 1. Постановка проблемы

Рассмотрим волны на поверхности несжимаемой невязкой жидкости, заключенной в бассейне с твердыми стенками.

Верхнюю, не соприкасающуюся со стенками поверхность жидкости называют *свободной*. Ее состояние, при котором волны отсутствуют, называют *невозмущенным*. В этом состоянии свободную поверхность будем считать *плоской*.

С невозмущенной свободной поверхностью свяжем прямоугольную декартову систему координат, для которых в этой главе сохраним традиционные обозначения x, y, z. Ось z направим вертикально вверх.

Состояние свободной поверхности, отклоняющееся от невозмущенного, называют *волнением*.

Будем считать, что *движение жидкости первоначально было вызвано консервативной системой сил* и рассматривать волнение в моменты времени, когда действие всех этих сил, за исключением силы тяжести, прекратилось. В этом случае волны на поверхности жидкости называют *гравитационными*. При действии на жидкость только консервативных сил, как известно из гидродинамики, ее движение оказывается *безвихревым* и поэтому существует потенциал скоростей Φ, т. е. компонента v_l скорости жидкости по направлению l может быть представлена в виде

$$v_l = -\frac{\partial \Phi}{\partial l}, \tag{1}$$