и

$$U_C = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{R_0}{R}\right)^{k+1} P_k(\cos\theta) \qquad (R > R_0),$$

следует определить коэффициент $a_k$ из условия заземления: $U_B + U_C = 0$ на поверхности шара.

*Ответ:* Искомый потенциал представляется выражениями:

$$U = U_B - \frac{q_0}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{h}\right)^k P_k(\cos\theta) = 0 \quad (R < R_0),$$

$$U = U_B - \frac{q_0 R_0}{hR} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R_0^2}{hR}\right)^k P_k(\cos\theta) \qquad (R > R_0).$$

# Глава XXIII *

# ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

## § 1. Постановка проблемы

Рассмотрим волны на поверхности несжимаемой невязкой жидкости, заключенной в бассейне с твердыми стенками.

Верхнюю, не соприкасающуюся со стенками поверхность жидкости называют *свободной*. Ее состояние, при котором волны отсутствуют, называют *невозмущенным*. В этом состоянии свободную поверхность будем считать *плоской*.

С невозмущенной свободной поверхностью свяжем прямоугольную декартову систему координат, для которых в этой главе сохраним традиционные обозначения $x$, $y$, $z$. Ось $z$ направим вертикально вверх.

Состояние свободной поверхности, отклоняющееся от невозмущенного, называют *волнением*.

Будем считать, что *движение жидкости первоначально было вызвано консервативной системой сил* и рассматривать волнение в моменты времени, когда действие всех этих сил, за исключением силы тяжести, прекратилось. В этом случае волны на поверхности жидкости называют *гравитационными*. При действии на жидкость только консервативных сил, как известно из гидродинамики, ее движение оказывается *безвихревым* и поэтому существует потенциал скоростей $\Phi$, т. е. компонента $v_l$ скорости жидкости по направлению $l$ может быть представлена в виде

$$v_l = -\frac{\partial \Phi}{\partial l}, \tag{1}$$

где $\Phi=\Phi(x, y, z; t)$ — некоторая функция координат и времени, удовлетворяющая (по пространственным координатам $x, y, z$) уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi=0. \tag{2}$$

Наконец, волнение жидкости будем считать малым, понимая под этим, что все производные потенциала скоростей: $\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \frac{\partial\Phi}{\partial t}$, а также смещение свободной поверхности при волнении достаточно малы, чтобы их квадратами и произведениями можно было пренебрегать, не внося существенной погрешности в решение. При перечисленных условиях задачу о волнении на свободной поверхности жидкости мы приведем к граничной задаче для уравнения Лапласа (2).

Установим, прежде всего, граничные условия, которым должен удовлетворять потенциал скоростей $\Phi$.

На неподвижной границе жидкости (стенки и дно бассейна), в силу (1), должно выполняться условие

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0, \tag{3}$$

так как жидкость не может пересекать твердые стенки. На свободной поверхности должно удовлетворяться условие

$$p=p_0, \tag{4}$$

где $p$ — гидродинамическое давление в жидкости, а $p_0$ — атмосферное давление.

Чтобы преобразовать последнее условие к более удобному виду, воспользуемся уравнениями Эйлера (10а) гл. VIII, описывающими движение идеальной жидкости. Возьмем то из этих уравнений, в которое входят производные компоненты скорости $v_z$. Запишем здесь это уравнение в виде

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=\overline{Z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{5}$$

где $\overline{Z}$ — внешняя сила, действующая на единицу массы жидкости вдоль оси $z$, а $\rho$ — плотность жидкости. При действии на жидкость только силы тяжести

$$\overline{Z}=-g,$$

где $g$ — ускорение силы тяжести. Далее, в силу (1), имеем

$$\frac{\partial v_z}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial y}=\frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t},$$

так что при наличии потенциала скоростей уравнение Эйлера (5) можно записать в форме:

$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial z}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial z}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-g-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z},$$

допускающей непосредственное интегрирование по $z$. Произведя это последнее, получим

$$\frac{p}{\rho}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}-gz-\frac{1}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)+C, \tag{6}$$

где $C$ — произвольная функция времени. Так как добавление к потенциалу любой функции времени не вызывает нарушения соотношения (1), то функцию $C=C(t)$ можно выбрать произвольно. Положим

$$C=\frac{p_0}{\rho}.$$

Квадратами скоростей, по сказанному выше, мы можем пренебречь. Тогда, обозначив через $\zeta$ координату $z$ свободной поверхности, получим

$$\zeta=\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{z=\zeta}.$$

Пренебрегая членами высшего порядка малости это выражение можем записать в виде

$$\zeta=\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{z=0}. \tag{7}$$

С той же степенью приближения, принимая во внимание, что нормаль к свободной поверхности составляет с осью $z$ малый угол, нормальную компоненту скорости жидкости на свободной поверхности можно положить равной

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=0}. \tag{8}$$

Дифференцируя (7) по времени $t$ и подставляя $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ из (8), получим

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=0}=0. \tag{9}$$

Соотношение (9) и представляет граничное условие на свободной поверхности, записанное в удобной для дальнейшего форме. Соотношение же (7) позволяет определить форму свободной поверхности, если решение для $\Phi$ известно.

Найдем сначала решение нашей задачи, представляющее в каждой точке занятого жидкостью пространства чисто периодическое колебание с одной и той же круговой частотой $\omega$, но, вообще говоря, с меняющейся от точки к точке амплитудой и фазой. Для этого положим:

$$\Phi=\operatorname{Re} ue^{-i\omega t}, \tag{10}$$

где $u$ — комплексная функция координат. Так как

$$\operatorname{Re} ue^{-i\omega t}=u'\cos\omega t+u''\sin\omega t,$$

где

$$u' = \operatorname{Re} u, \quad u'' = \operatorname{Im} u,$$

то соотношение (10) действительно описывает гармоническое колебание с фазой и амплитудой, зависящими от координат.

Чтобы найти уравнение и граничные условия, которым должна удовлетворять функция $u$, подставим в соотношения (2), (3) и (9) вместо $\Phi$ произведение $ue^{-i\omega t}$. Это даст в точках внутри жидкости

$$\Delta u = 0, \tag{11}$$

на стенках бассейна

$$\frac{du}{dn} = 0, \tag{12}$$

на свободной поверхности

$$g\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} - \omega^2 u\,|_{z=0} = 0. \tag{13}$$

Таким образом, приходим к внутренней смешанной задаче для уравнения Лапласа. Эта задача однородная. Поэтому, если $u$ — решение, то и $Au$, где $A$ — величина, не зависящая от координат, тоже решение.

Заметим, после того как функция $u$, удовлетворяющая уравнению (11) и граничным условиям (12)—(13) найдена, путем суперпозиции решений вида $A(\omega)\,ue^{-i\omega t}$ могут быть построены различные решения более общего вида. Например, интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, ue^{-i\omega t} d\omega \tag{14}$$

даст такое весьма общее решение. Величина $A$ как функция $\omega$ может быть выбрана произвольным образом, лишь бы интеграл (14) имел смысл.

## § 2. Двумерные волны в бассейне ограниченной глубины

Волны, не зависящие от одной из координат, называют *двумерными*. Направим ось $x$ перпендикулярно гребням волн. Тогда картина волнения не будет зависеть от координаты $y$ и уравнение (11) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим картину двумерного волнения в бассейне постоянной глубины $h$. Размер бассейна вдоль оси $x$ будем считать неограниченным, а вдоль оси $y$ либо имеющим определенное постоянное значение (канал с вертикальными стенками), либо неогра-