где

$$u' = \operatorname{Re} u, \quad u'' = \operatorname{Im} u,$$

то соотношение (10) действительно описывает гармоническое колебание с фазой и амплитудой, зависящими от координат.

Чтобы найти уравнение и граничные условия, которым должна удовлетворять функция u, подставим в соотношения (2), (3) и (9) вместо Φ произведение $ue^{-i\omega t}$. Это даст в точках внутри жидкости

$$\Delta u = 0, \tag{11}$$

на стенках бассейна

$$\frac{du}{dn} = 0, \tag{12}$$

на свободной поверхности

$$g\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} - \omega^2 u\,|_{z=0} = 0. \tag{13}$$

Таким образом, приходим к внутренней смешанной задаче для уравнения Лапласа. Эта задача однородная. Поэтому, если u — решение, то и Au, где A — величина, не зависящая от координат, тоже решение.

Заметим, после того как функция u, удовлетворяющая уравнению (11) и граничным условиям (12)—(13) найдена, путем суперпозиции решений вида $A(\omega)\,ue^{-i\omega t}$ могут быть построены различные решения более общего вида. Например, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, ue^{-i\omega t} d\omega \tag{14}$$

даст такое весьма общее решение. Величина A как функция ω может быть выбрана произвольным образом, лишь бы интеграл (14) имел смысл.

§ 2. Двумерные волны в бассейне ограниченной глубины

Волны, не зависящие от одной из координат, называют *двумерными*. Направим ось x перпендикулярно гребням волн. Тогда картина волнения не будет зависеть от координаты y и уравнение (11) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим картину двумерного волнения в бассейне постоянной глубины h. Размер бассейна вдоль оси x будем считать неограниченным, а вдоль оси y либо имеющим определенное постоянное значение (канал с вертикальными стенками), либо неограниченным. В соответствии с этим из граничных условий (12)—(13) сохраним условие на свободной поверхности:

$$g\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} - \omega^2 u\,|_{z=0} = 0 \tag{16}$$

и условие на дне бассейна:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = 0. \tag{17}$$

Условие на стенках канала будет выполнено автоматически, так как функция u не зависит от y.

Решение уравнения (15) будем искать по методу разделения переменных. Полагая $u = v(x)\,w(z)$, придем к двум уравнениям:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k^2 v = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - k^2 w = 0,$$

где k^2 — произвольное число. Их общие интегралы:

$$v = B_1 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx}, \tag{18}$$

$$w = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}, \tag{19}$$

где B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Числа B_1, B_2, C_1, C_2, а также k^2 необходимо выбрать так, чтобы удовлетворялись как граничные условия, так и требование малости волнения (§ 1).

Начнем с рассмотрения выражения (18), определяющего зависимость волнения от координаты x. Если число k^2 комплексно или отрицательно, то из выражения (18) следует, что в одном из направлений оси x волнение не только не может быть малым, но неограниченно возрастает. Поэтому число k^2 следует выбрать вещественным и положительным. Через k обозначим положительный корень из k^2.

Заметим попутно, что при вещественном k из (18) непосредственно вытекает соотношение

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{20}$$

где λ — длина волны. Число k называют *волновым числом.*

Подставив произведение vw в граничное условие (17), получим

$$C_1 e^{kh} - C_2 e^{-kh} = 0,$$

откуда следует, что с точностью до множителя

$$C_1 = e^{-kh}, \quad C_2 = e^{kh},$$

так что

$$w = e^{k(z-h)} + e^{-k(z-h)}. \tag{21}$$

Используя граничное условие (16), получим

$$gk \operatorname{sh} kh = \omega^2 \operatorname{ch} kh$$

или

$$\omega^2 = gh \operatorname{th} kh, \tag{22}$$

т. е. волновое число k и круговая частота колебаний функционально связаны. Заметив, что правая часть уравнения (22) монотонно и неограниченно возрастает с ростом k, заключим, что каждому значению ω соответствует одно и только одно значение k, удовлетворяющее этому уравнению, причем с ростом ω возрастает и k.

Вернемся теперь снова к выражению (18) для функции $v(x)$. Поскольку все условия задачи удовлетворены выбором постоянных C_1 и C_2 и ограничениями, наложенными на значения k^2, то постоянные B_1 и B_2 ограничиваются только требованием малости амплитуд волнения, в остальном же они произвольны. Это является естественным, так как мы не задавали никаких количественных характеристик начального возмущения, вызвавшего волнение. Поэтому искомое решение неоднозначно и определит лишь класс возможных движений жидкости, удовлетворяющих поставленным условиям.

Умножая (18) на $e^{-i\omega t}$, получим

$$ve^{-i\omega t} = B_1 e^{ik\left(x - \frac{\omega}{k} t\right)} + B_2 e^{-ik\left(x + \frac{\omega}{k} t\right)}, \tag{23}$$

откуда ясно, что первый член в правой части (18) соответствует волне, бегущей с *фазовой скоростью*

$$v_ф = \frac{\omega}{k} \tag{24}$$

в направлении оси x, а второй член соответствует волне, бегущей с той же фазовой скоростью в противоположном направлении. Подставляя ω^2 из (22), найдем, что

$$v_ф^2 = \frac{g}{k} \operatorname{th} kh = \frac{1}{2\pi} g\lambda \operatorname{th} 2\pi h\lambda, \tag{25}$$

т. е. фазовая скорость волн зависит от их длины. Это означает, что если наложением волн разной длины образована сложная волна, то в общем случае с течением времени ее форма будет изменяться, так как отдельные слагающие ее волны будут распространяться с разной скоростью (*дисперсия волн*). Наоборот, как следует из (23), волны, образованные наложением волн одной длины, сохраняют свою форму с течением времени. Заметим, что эти последние волны всегда неограниченны в пространстве (периодичны).

Если

$$kh = 2\pi \frac{h}{\lambda} \ll 1,$$

т. е. если длина волны намного больше глубины бассейна, то $\operatorname{th} kh \approx kh$ и, в силу (25), получим

$$v_\Phi \approx \sqrt{gh}. \tag{26}$$

Это означает, что очень длинные волны распространяются без дисперсии.

Чтобы извлечь из нашего решения дальнейшие следствия, выпишем выражение для потенциала скорости Φ применительно к волне, бегущей в положительном направлении оси x. В силу (10), имеем

$$\Phi = \operatorname{Re} A \operatorname{ch} k(h-z)\, e^{ik\left(x - \frac{\omega}{k} t\right)}. \tag{27}$$

Суперпозиция решений (27) с разными значениями ω и соответствующими им значениями k, очевидно, также удовлетворяет условиям задачи. Поэтому, считая A и ω функциями k и интегрируя решение (27) по k, придем к более общему решению

$$\Phi = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \operatorname{ch} k(h-z)\, e^{ik\left(x - \frac{\omega}{k} t\right)} dk. \tag{28}$$

Функция $A(k)$ здесь ограничивается только требованием, чтобы интеграл в правой части имел смысл. (С точки зрения физики рассматриваемые значения числа k должны быть ограничены сверху, так как при очень высоких частотах вязкостью и другими не учитываемыми уравнениями Эйлера характеристиками нельзя пренебрегать, и наше решение теряет физический смысл. Иначе говоря, следует считать, что, начиная с некоторых, достаточно больших значений k, функция $A(k)$ становится равной нулю.)

Решение (28) представляет суперпозицию волн с бесконечно малыми амплитудами $A(k)\,dk$. Если некоторой частоте или набору частот соответствуют волны с конечной (хотя, согласно принятому условию, малой) амплитудой, то к (28) следует добавить конечную сумму по соответствующим значениям k:

$$\operatorname{Re} \sum_{(k)} A(k) \operatorname{ch} k(h-z)\, e^{ik\left(x - \frac{\omega}{k}\right)t}, \tag{29}$$

что и даст наиболее общую форму решения рассматриваемой нами задачи. Интересующие нас выводы мы, однако, сумеем извлечь уже из решения (28).

Дифференцируя выражение под знаком интеграла (28) по t и полагая $z=0$, в силу (7), придем к следующему выражению для координаты $z=\zeta$ свободной поверхности:

$$\zeta = \operatorname{Re} \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{g} A(k) \operatorname{ch} kh\, e^{ik\left(x - \frac{\omega}{k} t\right)} dk \right].$$

Вводя новую функцию от k:

$$B(k) = -\frac{i\omega}{g} A(k),$$

перепишем это соотношение в виде

$$\zeta = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} B(k) \operatorname{ch} kh\, e^{ik\left(x - \frac{\omega}{k} t\right)} dk. \tag{30}$$

Предположим, что в некоторый момент времени, который мы примем за начало отсчета, форма поверхности жидкости описывалась функцией

$$\zeta|_{t=0} = \zeta_0(x).$$

Найдем, как изменяется форма поверхности в дальнейшем. В силу (30):

$$\zeta_0(x) = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} B(k) \operatorname{ch} kh\, e^{ikx} dk.$$

Функцию $B(k)$, как мы сейчас покажем, можно выбрать так, чтобы интеграл в правой части этого соотношения был вещественным, т. е. чтобы было

$$\zeta_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B(k) \operatorname{ch} kh\, e^{ikx} dk. \tag{31}$$

Чтобы определить $B(k)$ указанным образом, воспользуемся интегральной формулой Фурье *

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi, \tag{32}$$

справедливой, если в интервале, содержащем внутри точку x, функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение и непрерывна, а в интервале $(-\infty, \infty)$ абсолютно интегрируема. Будем считать эти условия для функции $\zeta_0(x)$ выполненными п; и всех x и положим в (32): $f(x) = \zeta_0(x)$. Тогда из сравнения соотношений (31) и (32) вытекает, что соотношение (31) будет выполнено, если положить

$$B(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{\bar{\zeta}_0(k)}{\operatorname{ch} kh}, \tag{33}$$

где

$$\bar{\zeta}_0(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(x) e^{-ikx} dx. \tag{34}$$

---

* См. В. И. Смирнов [1], т. II, п. 160.

Подставляя это значение $B(k)$ в (30), получим

$$\zeta(x, t) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\zeta}_0(k) e^{ik\left(x - \frac{\omega}{k} t\right)} dk. \tag{35}$$

Эта формула позволяет определить изменение формы поверхности жидкости с течением времени.

Рассмотрим частный случай, когда первоначальное возмущение образовано весьма длинными волнами ($\lambda \gg h$). Тогда, согласно (26),

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}$$

и соотношение (35) примет вид

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\zeta}_0(k) e^{ik(x - t\sqrt{gh})} dk.$$

Замечая, что выражение $(x - t\sqrt{gh})$ не зависит от k и играет здесь ту же роль, что и x в соотношении (32), получим

$$\zeta(x, t) = \zeta_0(x - t\sqrt{gh}),$$

т. е. первоначальное возмущение распространяется без искажения, как уже и упоминалось.

К другому важному частному случаю придем, предположив, что

$$\zeta_0(x) = \operatorname{Re} \psi(x) e^{ik_0 x}, \tag{36}$$

где $\psi(x)$ — вещественная функция, которую мы будем считать обладающей следующими свойствами:

а) она мало меняется на протяжении длины волны

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0};$$

б) она отлична от нуля лишь в конечном интервале изменения x. Такого рода возмущение называют *группой* или *цугом* волн длины λ_0.

Как следует из теории интеграла Фурье, в силу свойства а), функция $\bar{\zeta}_0(k)$, определяемая формулой (34), близка к нулю при всех k за исключением значений k, близких к значению k_0. Благодаря последнему обстоятельству в разложении

$$\omega = \omega_0 + \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k=k_0} (k - k_0) + \ldots$$

можно сохранить лишь два первых члена, не внося существенной погрешности в вычисление интеграла (35). Обозначив

$$k - k_0 = k', \quad \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k=k_0} = v_{\text{г}},$$

получим

$$e^{i(kx-\omega t)} \approx e^{i(k_0+k')x}\, e^{-i(\omega_0+v_\Gamma k')t} = e^{i(k_0x-\omega_0t)}\, e^{ik'(x-v_\Gamma t)},$$

в силу чего интеграл (35) приближенно может быть записан в виде

$$\zeta(x, t) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi} e^{i(k_0x-\omega_0t)} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\zeta}_0(k')\, e^{ik'(x-v_\Gamma t)} dk,$$

где

$$\bar{\zeta}_0(k') = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{ik_0x} e^{-ikx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-ik'x}\, dx.$$

Принимая во внимание интегральную формулу Фурье (32), легко найдем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\zeta}_0(k')\, e^{ik'(x-v_\Gamma t)} dk' = \psi(x - v_\Gamma t),$$

откуда вытекает, что

$$\zeta(x, t) = \mathrm{Re}\,\psi(x - v_\Gamma t)\, e^{i(k_0x-\omega_0t)}. \tag{37}$$

Таким образом, в первом приближении рассматриваемая группа волн *как целое* распространяется со скоростью

$$v_\Gamma = \left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k=k_0}.$$

Эту скорость называют *групповой скоростью*. Отдельные же волны группы (гребни и впадины) бегут со скоростью $\frac{\omega_0}{k_0}$, представляющей *фазовую скорость* волн соответствующей длины волны. Эти волны не отстают от группы и не опережают ее, так как их высота у границ группы, характеризуемая множителем $\psi(x - v_2 t)$, обращается в нуль. Так дело обстоит, конечно, только в том приближении, в котором мы рассматриваем здесь группу. Учет членов высшего порядка показал бы, что с течением времени группа, вообще говоря, меняет форму и неограниченно увеличивается по размерам из-за дисперсии волн.

Подчеркнем, что *понятие групповой скорости в общем случае произвольного возмущения ввести нельзя*. Оно применимо только в отношении групп волн, спектр которых, характеризуемый функцией $\zeta_0(k)$, простирается лишь на достаточно узкий интервал значений волнового числа k.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что при прохождении двумерной волны частицы жидкости в бассейне движутся по эллиптическим орбитам, большая ось a которых направлена вдоль направления распространения волн, а малая b — вертикально, причем

$$a=\frac{k}{\omega} A \operatorname{ch} k(h-z), \quad b=\frac{k}{\omega} A \operatorname{sh} k(h-z).$$

Указание. Воспользоваться выражением для потенциала скорости (27). Замечая, что дифференцирование потенциала по координатам частицы жидкости, которые она имеет при отсутствии возмущения, вместо дифференцирования по ее текущим координатам при прохождении волны приводит к ошибке 2-го порядка малости в определении скорости частицы, найти компоненты скорости частицы, расположенной на глубине z:

$$v_x=-\frac{\partial \Phi}{\partial x}=Re\, ik A \operatorname{ch} k(h-z)\, e^{ik\left(x-\frac{\omega}{k} t\right)},$$

$$v_z=-\frac{\partial \Phi}{\partial z}=Re kA \operatorname{sh} k(h-z)\, e^{ik\left(x-\frac{\omega}{k} t\right)}.$$

Интегрированием этих выражений определить отклонения частицы x', z' от положения равновесия в функции времени. Постоянную интегрирования следует выбрать из условия периодичности движения. Наконец, показать, что величины x', z' удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2+\left(\frac{z'}{b}\right)^2=1.$$

2. Рассмотреть случай бассейна неограниченной глубины.

§ 3. Кольцевые волны

Возмущение в какой-либо точке поверхности жидкости вызывает появление кольцевых волн с центром в точке возмущения.

Для изучения этих волн введем цилиндрические координаты r, φ, z с началом в месте возмущения и осью z, направленной вертикально вниз. Уравнение Лапласа (2) для потенциала скоростей $\Phi(r, \varphi, z; t)$, в силу формулы (3) гл. XIX, примет при этом вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0. \tag{38}$$

Рассмотрим сначала колебания чисто периодические по времени, в связи с чем, согласно § 1, примем

$$\Phi(r, \varphi, z; t)=\operatorname{Re} u(r, \varphi, z) e^{-i\omega t}, \tag{39}$$

где ω — круговая частота колебаний, а u — комплексная функция координат, как и Φ удовлетворяющая уравнению вида (38). Считая, что интересующие нас волны имеют кольцевую симметрию, придем к уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{40}$$