лена вдоль направления распространения волн, а малая b — вертикально, причем

$$a=\frac{k}{\omega}A\operatorname{ch}k(h-z),\quad b=\frac{k}{\omega}A\operatorname{sh}k(h-z).$$

Указание. Воспользоваться выражением для потенциала скорости (27). Замечая, что дифференцирование потенциала по координатам частицы жидкости, которые она имеет при отсутствии возмущения, вместо дифференцирования по ее текущим координатам при прохождении волны приводит к ошибке 2-го порядка малости в определении скорости частицы, найти компоненты скорости частицы, расположенной на глубине z:

$$v_x=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}=Re\,ik\,A\operatorname{ch}k(h-z)\,e^{ik\left(x-\frac{\omega}{k}t\right)},$$

$$v_z=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}=RekA\operatorname{sh}k(h-z)\,e^{ik\left(x-\frac{\omega}{k}t\right)}.$$

Интегрированием этих выражений определить отклонения частицы x', z' от положения равновесия в функции времени. Постоянную интегрирования следует выбрать из условия периодичности движения. Наконец, показать, что величины x', z' удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2+\left(\frac{z'}{b}\right)^2=1.$$

2. Рассмотреть случай бассейна неограниченной глубины.

§ 3. Кольцевые волны

Возмущение в какой-либо точке поверхности жидкости вызывает появление кольцевых волн с центром в точке возмущения.

Для изучения этих волн введем цилиндрические координаты r, φ, z с началом в месте возмущения и осью z, направленной вертикально вниз. Уравнение Лапласа (2) для потенциала скоростей $\Phi(r,\varphi,z;t)$, в силу формулы (3) гл. XIX, примет при этом вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0. \tag{38}$$

Рассмотрим сначала колебания чисто периодические по времени, в связи с чем, согласно § 1, примем

$$\Phi(r,\varphi,z;t)=\operatorname{Re}u(r,\varphi,z)e^{-i\omega t}, \tag{39}$$

где ω — круговая частота колебаний, а u — комплексная функция координат, как и Φ удовлетворяющая уравнению вида (38). Считая, что интересующие нас волны имеют кольцевую симметрию, придем к уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{40}$$

Полагая далее бассейн неограниченным, сохраним граничные условия только для свободной поверхности (13):

$$\text{при } z=0 \qquad g\frac{\partial u}{\partial z}-\omega^2 u=0 \tag{41}$$

и для дна бассейна (12):

$$\text{при } z=h \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{42}$$

Как и в предыдущем параграфе, решение уравнения (40) будем искать по методу разделения переменных. Положив $u(r, z) = v(r)\,w(z)$, после очевидных выкладок придем к уравнениям:

$$\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}+k^2v=0, \tag{43}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2}-k^2w=0, \tag{44}$$

где k^2 — произвольное число.

Оба граничных условия (41) — (42) относятся к уравнению (44). Как само уравнение (44), так и эти граничные условия те же, что и в § 2. Поэтому на основании формулы (21) сразу можем записать, что с точностью до множителя,

$$w(z)=\operatorname{ch} k(h-z), \tag{45}$$

причем, в силу (22), k — вещественное число, связанное с круговой частотой колебаний ω уравнением

$$\omega^2=gk\operatorname{th} kh. \tag{46}$$

Что же до уравнения (43), то это уравнение Бесселя нулевого порядка (гл. XIII). Его решением, ограниченным и непрерывным при всех r, включая $r=0$, является функция Бесселя нулевого порядка $J_0(kr)$. Таким образом, принимая во внимание соотношения (39) и (45), придем к заключению, что все непрерывные решения уравнения (40) при граничных условиях (41) — (42) имеют вид

$$u(r, z)=AJ_0(kr)\operatorname{ch} k(h-z),$$

где A — величина, не зависящая ни от r, ни от z. Отсюда, на основании равенства (39),

$$\Phi(r, z; t)=\operatorname{Re} AJ_0(kr)\operatorname{ch} k(h-z)\,e^{-i\omega t}. \tag{47}$$

В силу формулы (7), высота свободной поверхности над ее невозмущенным уровнем определится соотношением

$$\zeta(r, t)=-\operatorname{Re}\frac{i\omega}{g}AJ_0(kr)\operatorname{ch} kh\,e^{-i\omega t}. \tag{48}$$

Воспользовавшись графиком функции $J_0(kr)$ легко видеть, что расстояние между двумя соседними вершинами рассматриваемых периодических кольцевых волн (аналог длины волны в двумерном случае) увеличивается по мере удаления от точки $r=0$, а высота волн убывает.

Рассмотрим теперь случай произвольного осесимметричного начального возмущения.

Предположим, что при $t=0$

$$\zeta=\zeta(r,\ 0)=\zeta_0(r), \tag{49}$$

где $\zeta_0(r)$ — заданная непрерывная функция r, и поставим задачей найти движение жидкости при $t>0$. Воспользуемся с этой целью интегралом Фурье — Бесселя *:

$$f(x)=\int_0^\infty kJ_0(kx)\,dk\int_0^\infty \xi f(\xi)\,J_0(k\xi)\,d\xi \qquad (0<x<\infty),$$

заменив в нем функцию $f(x)$ функцией $\zeta_0(r)$. Введя функцию

$$\bar{\zeta}_0(k)=\int_0^\infty \xi\zeta_0(\xi)\,J_0(k\xi)\,d\xi, \tag{50}$$

можем записать

$$\zeta_0(r)=\int_0^\infty \bar{\zeta}_0(k)\,J_0(kr)\,k\,dk. \tag{51}$$

Это соотношение дает представление начального возмущения $\zeta_0(r)$ в форме суперпозиции кольцевых волн разных частот. Отсюда ясно, что функция

$$\Phi(r,\ z;\ t)=\mathrm{Re}\,ig\int_0^\infty \bar{\zeta}_0(k)\,J_0(kr)\,\frac{\operatorname{ch}k(h-z)}{\operatorname{ch}kh}\,\frac{e^{-i\omega t}}{\omega}\,k\,dk \tag{52}$$

дает решение нашей задачи. Действительно, эта функция представляет суперпозицию функций (47), удовлетворяющих уравнению задачи и граничным условиям. Следовательно, она также обладает этими свойствами. В силу же (7) из нее вытекает, что

$$\zeta(r,\ t)=\mathrm{Re}\int_0^\infty \bar{\zeta}_0(k)\,J_0(kr)\,e^{-i\omega t}\,k\,dk, \tag{53}$$

откуда при $t=0$ получаем соотношение (51). Таким образом, функция $\Phi(r,\ z;\ t)$ представляет потенциал скорости жидкости при заданных граничных и начальном условиях и поэтому определяет искомое движение жидкости. Формула (53) определяет форму поверхности жидкости при $t>0$.

---

* Вывод этой формулы см. в § 10 гл. XXXII.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что в случае бассейна неограниченной глубины формула (52) принимает вид

$$\Phi(r, z; t) = \operatorname{Re} ig \int_0^\infty \bar{\zeta}_0(k) J_0(kr) e^{-kz} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega} k\, dr.$$

2. Пусть

$$\zeta_0(r) = \begin{cases} 2\pi b & \text{при } 0 \leqslant r \leqslant r_0 \\ 0 & \text{при } r > r_0. \end{cases}$$

Показать, что если $r_0 \to 0$, а $b \to \infty$ так, что при этом все время

$$\pi b r_0^2 = 1,$$

то

$$\bar{\zeta}_0(k) \to 1$$

(«единичное возмущение» в начале координат).

3. Показать, что в бассейне неограниченной глубины при наличии «единичного возмущения» в начальный момент времени в начале координат в последующие моменты времени потенциал Φ может быть представлен в форме ряда

$$\Phi(r, z; t) = \frac{gt}{2\pi}\left[\frac{P_1(\cos\theta)}{r_1^2} + \frac{gt^2}{3!}\frac{2!\,P_2(\cos\theta)}{r_1^3} + \frac{(gt^2)^2}{5!}\frac{3!\,P_3(\cos\theta)}{r_1^4} + \ldots\right],$$

где $r_1 = \sqrt{r^2+z^2}$, θ — угол между осью z и лучом, направленным из начала координат в точку (r, z), $P_k(\cos\theta)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ — полиномы Лежандра.

Указание. Отношение $\dfrac{e^{-i\omega t}}{\omega}$ разложить в ряд по степеням ω, ввести вместо ω величину k согласно (46) и воспользоваться формулой:

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-kz} J_0(kr) k^n\, dk = \frac{P_n(\cos\theta)}{r_1^{n+1}}.$$

4. Показать, что при условии предыдущей задачи высота поверхности жидкости может быть представлена в форме ряда

$$\zeta(r, t) = \frac{1}{2\pi r^2}\left[\frac{1^2}{2!}\frac{gt^2}{r} - \frac{1^2\cdot 3^2}{6!}\left(\frac{gt^2}{r}\right)^3 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{10!}\left(\frac{gt^2}{r}\right)^5 - \ldots\right].$$

5. Показать, что при условиях, указанных в задаче 3, каждая фаза движения распространяется от начала координат по радиусам с постоянным ускорением.

Указание. Исходить из решения задачи 4, согласно которому

$$\zeta(r, t) = \zeta\left(\frac{gt^2}{r}\right).$$

§ 4. Метод стационарной фазы

Стокс (1850 г.) и Кельвин (1887 г.) указали метод приближенного вычисления интегралов типа полученных выше, который получил название *метода стационарной фазы* и нашел многочисленные применения и обобщения. Мы изложим этот метод без строгого обоснования.