ЗАДАЧИ

1. Показать, что в случае бассейна неограниченной глубины формула (52) принимает вид

$$\Phi(r, z; t) = \operatorname{Re} ig \int_0^\infty \overline{\zeta}_0(k) J_0(kr) e^{-kz} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega} k\, dr.$$

2. Пусть

$$\zeta_0(r) = \begin{cases} 2\pi b & \text{при } 0 \leqslant r \leqslant r_0 \\ 0 & \text{при } r > r_0. \end{cases}$$

Показать, что если $r_0 \to 0$, а $b \to \infty$ так, что при этом все время

$$\pi b r_0^2 = 1,$$

то

$$\overline{\zeta}_0(k) \to 1$$

(«единичное возмущение» в начале координат).

3. Показать, что в бассейне неограниченной глубины при наличии «единичного возмущения» в начальный момент времени в начале координат в последующие моменты времени потенциал Φ может быть представлен в форме ряда

$$\Phi(r, z; t) = \frac{gt}{2\pi}\left[\frac{P_1(\cos\theta)}{r_1^2} + \frac{gt^2}{3!}\frac{2!\,P_2(\cos\theta)}{r_1^3} + \frac{(gt^2)^2}{5!}\frac{3!\,P_3(\cos\theta)}{r_1^4} + \ldots\right],$$

где $r_1 = \sqrt{r^2 + z^2}$, θ — угол между осью z и лучом, направленным из начала координат в точку (r, z), $P_k(\cos\theta)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ — полиномы Лежандра.

Указание. Отношение $\dfrac{e^{-i\omega t}}{\omega}$ разложить в ряд по степеням ω, ввести вместо ω величину k согласно (46) и воспользоваться формулой:

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-kz} J_0(kr) k^n\, dk = \frac{P_n(\cos\theta)}{r_1^{n+1}}.$$

4. Показать, что при условии предыдущей задачи высота поверхности жидкости может быть представлена в форме ряда

$$\zeta(r, t) = \frac{1}{2\pi r^2}\left[\frac{1^2}{2!}\frac{gt^2}{r} - \frac{1^2\cdot 3^2}{6!}\left(\frac{gt^2}{r}\right)^3 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{10!}\left(\frac{gt^2}{r}\right)^5 - \ldots\right].$$

5. Показать, что при условиях, указанных в задаче 3, каждая фаза движения распространяется от начала координат по радиусам с постоянным ускорением.

Указание. Исходить из решения задачи 4, согласно которому

$$\zeta(r, t) = \zeta\left(\frac{gt^2}{r}\right).$$

§ 4. Метод стационарной фазы

Стокс (1850 г.) и Кельвин (1887 г.) указали метод приближенного вычисления интегралов типа полученных выше, который получил название *метода стационарной фазы* и нашел многочисленные применения и обобщения. Мы изложим этот метод без строгого обоснования.

Рассмотрим интеграл

$$J=\int_a^b \psi(\xi)\, e^{if(\xi)}\, d\xi, \tag{54}$$

где $\psi(\xi)$ и $f(\xi)$ — такие вещественные функции, что на большей части интервала интегрирования, за исключением некоторых окрестностей точек, в которых $f'(\xi)=0$, при изменении функции $f(\xi)$ на 2π, функция $\psi(\xi)$ меняется лишь на малую долю своего первоначального значения. Интервал интегрирования предполагается достаточно большим, чтобы содержать большое число колебаний функции $e^{if(\xi)}$.

При интегрировании по участкам, на которых функция $f(\xi)$ быстро изменяется, вещественная и мнимая части подынтегрального выражения часто меняют знак, вследствие чего значение интеграла почти не меняется. Лишь в окрестностях точек, где $f'(\xi)=0$, интеграл может получить значительные приращения.

Метод стационарной фазы состоит в том, что, руководствуясь изложенными соображениями, интегрирование проводят только в окрестности тех точек, в которых производная от $f(\xi)$ равна нулю, пренебрегая всеми другими участками интервала интегрирования.

Пусть α_1, α_2, ... — корни уравнения

$$f'(\xi)=0,$$

причем при $\xi=\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ вторая производная $f''(\xi)\neq 0$. Обозначим через ξ_k малые отклонения аргумента ξ от α_k, т. е. положим

$$\xi_k=\xi-\alpha_k.$$

В первом приближении в малой окрестности точки $\xi=\alpha_k$ имеем

$$f(\xi)=f(\alpha_k)+\frac{1}{2}\xi_k^2 f''(\alpha_k). \tag{55}$$

Подставляя это выражение в (54) и принимая во внимание все сказанное выше, можем написать

$$J\approx\sum_{(k)}\psi(\alpha_k)\, e^{if(\alpha_k)}\int_{(\alpha_k)} e^{\frac{i}{2}f''(\alpha_k)\,\xi_k^2}\, d\xi_k,$$

где суммирование производится по всем значениям k, а интегрирование ведется в малой окрестности точек $\xi=\alpha_k$. Вследствие колебания подынтегральной функции без существенной погрешности можно положить

$$\int_{(\alpha_k)} e^{\frac{i}{2}f''(\alpha_k)\,\xi_k^2}\, d\xi_k\approx\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2}f''(\alpha_k)\,\xi_k^2}\, d\xi_k=\left(\frac{2\pi}{|f''(\alpha_k)|}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{s_k}{4}i\pi},$$

где s_k равно $(+1)$ или (-1) в зависимости от того, больше или меньше нуля вторая производная $f''(\xi)$ при $\xi=\alpha_k$. Окончательно, в первом приближении получим

$$J = \sum_{(k)} \psi(\alpha_k) \left(\frac{2\pi}{|f''(\alpha_k)|} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left[f(\alpha_k) + \frac{s_k}{4}\pi\right]}. \tag{56}$$

Приближение (56) дает хорошие результаты, вообще говоря, только в том случае, если в окрестности $\xi = \alpha_k$ члены ряда

$$f(\xi) = f(\alpha_k) + \frac{1}{2}\xi_k^2 f''(\alpha_k) + \frac{1}{6}\xi_k^3 f'''(\alpha_k) + \ldots$$

убывают достаточно быстро.

Применим метод стационарной фазы к задаче о кольцевых волнах, которую мы рассматривали в предыдущем параграфе.

Предположим для простоты, что глубина бассейна неограниченна и в начальный момент времени в начале координат действует „*единичное возмущение*" (см. задачу 2 к предыдущему параграфу). Единичное возмущение отображает тот случай, когда *первоначально поверхность жидкости возмущена только в ближайшей окрестности начала координат*, причем это возмущение представляет впадину *единичного объема*, симметричную относительно начала. Легко видеть, что при единичном возмущении $\overline{\zeta}_0(k) = 1$ (см., например, упомянутую задачу), в силу чего формула (53) примет вид

$$\zeta(r, t) = \mathrm{Re} \int_0^\infty J_0(kr) e^{-i\omega t} k\, dk. \tag{57}$$

Будем искать приближенное значение $\zeta(r, t)$ при достаточно больших r и t.

При малых k подынтегральное выражение близко к нулю, следовательно, участки промежутка интегрирования, определяющие значения интеграла, нужно искать не при малых k. Поэтому значения (kr), соответствующие этим участкам, можно считать большими и, принимая во внимание асимптотическое представление (29) гл. XIII, положить

$$J_0(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left[e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)} \right].$$

Далее, согласно (46) при $h = \infty$

$$\omega = \sqrt{gk}.$$

Подставляя приведенные выражения в (57), получим

$$\zeta(r, t) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi r}} \int_0^\infty \left[e^{i\left(kr - t\sqrt{gk} + \frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(kr + t\sqrt{gk} + \frac{\pi}{4}\right)} \right] \sqrt{k}\, dk.$$

Интеграл от второго слагаемого в правой части в соответствии с идеями метода стационарной фазы следует положить равным нулю. Действительно, выражение $(kr + t\sqrt{gk})$ при $r > 0$, $t > 0$, $k > 0$ не имеет ни максимумов, ни минимумов. Следовательно, его производная по k не обращается в нуль в области интегрирования и сумма (56) равна нулю.

Уравнение

$$\frac{\partial}{\partial k}(kr - t\sqrt{gk}) = r - \frac{1}{2}t\sqrt{\frac{g}{k}} = 0$$

имеет единственный корень

$$k_1 = \frac{gt^2}{4r^2}. \tag{58}$$

Далее найдем, что

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2}(kr - t\sqrt{gk})\Big|_{k=k_1} = \frac{1}{4}\,\frac{g^{1/2}t}{k_1^{3/2}} > 0$$

и согласно (56) получим

$$\zeta(r,\ t) = \operatorname{Re}\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\sqrt{k_1}\sqrt{\frac{8\pi k_1^{3/2}}{g^{1/2}t}}\,e^{i\left(k_1 r - t\sqrt{gk_1} + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Подстановка сюда k_1 из (58) после простых выкладок приводит к окончательному соотношению, справедливому при достаточно больших r и t:

$$\zeta(r,\ t) \approx \frac{gt^2}{2^{3/2}r^3}\cos\frac{gt^2}{4r}. \tag{59}$$

Проанализируем полученную формулу.

Фиксируя t, видим, что с *ростом r профиль поверхности жидкости образуется все более и более длинными волнами безгранично убывающей высоты*, заканчиваясь бесконечно длинным „горбом“, высота которого обращается в нуль только в бесконечности. Наоборот, фиксируя r, видим, что колебания в каждой данной точке вначале происходят медленно и имеют малую амплитуду, с течением же времени они неограниченно убыстряются и возрастают по амплитуде.

Ограничимся, опуская подробное исследование, краткими замечаниями, относящимися к этим результатам. Прежде всего отметим, что скорость распространения возмущения оказывается бесконечно большой. Действительно, невозмущенная область при любом конечном $t > 0$ отсутствует. Легко показать, что это обстоятельство является прямым следствием предположения о *несжимаемости жидкости*. Практически любая жидкость сжимаема, чем обусловливается отсутствие бесконечно быстро распространяющихся компонент волнения.

Далее мы пришли к выводу о неограниченном возрастании амплитуды колебаний с течением времени. Легко показать, что он обусловлен предположением о бесконечно малой величине площади начальной впадины, тогда как объем ее принят конечным. Вследствие этого амплитуда начального возмущения оказывается бесконечно большой. Распространение этой „бесконечной амплитуды" и приводит к неограниченному нарастанию амплитуд высокочастотных компонент. Как показывает подробное исследование, при конечной площади области начальной впадины, волны, длина которых существенно меньше ее поперечника, исходя из разных точек впадины, взаимно погашаются вследствие интерференции. Поэтому практически высокочастотная компонента, содержащая волны существенно меньшей длины, чем поперечник области начального возмущения, как бы „обрезается" и никакого неограниченного возрастания амплитуды не получается.

С учетом сделанных замечаний (обрезание мгновенно распространяющейся компоненты и коротких волн) формула (59) дает правильную картину распространения волнения. Сначала, расходясь из первоначально локализованного „волнового пакета", в произвольную точку наблюдения приходят длинные волны, имеющие бóльшую скорость распространения. Затем точки наблюдения достигают более короткие волны, которые оказываются имеющими бóльшую амплитуду. По мере удаления от центра возмущения горбы и впадины растягиваются (что отражает происходящую *дисперсию* волн). Если следить за распространением отдельного горба, то он как бы оказывается принадлежащим волне все большей длины, в соответствии с чем горбы (вообще точки одинаковой фазы движения) распространяются с *ускорением*. Величина их быстро падает. Все это и дает картину, которую можно наблюдать, бросив в воду камень.

Глава XXIV

УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

§ 1. Связь уравнения Гельмгольца с некоторыми уравнениями гиперболического и параболического типов

Рассмотрим уравнение

$$\Delta w = a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2a_1 \frac{\partial w}{\partial t} + a_2 w, \tag{1}$$

где a_0, a_1, a_2 — постоянные. При $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ оно представляет *телеграфное уравнение*. С его одномерным аналогом мы уже имели дело в ч. I. При $a_1 = a_2 = 0$, $a_0 > 0$ оно переходит в *волновое уравнение* (ч. I), при $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 > 0$ — в *уравнение теплопроводности и диффузии*, при $a_0 = 0$, $a_1 > 0$, $a_2 \neq 0$ — в *урав-*