он обусловлен предположением о бесконечно малой величине площади начальной впадины, тогда как объем ее принят конечным. Вследствие этого амплитуда начального возмущения оказывается бесконечно большой. Распространение этой „бесконечной амплитуды“ и приводит к неограниченному нарастанию амплитуд высокочастотных компонент. Как показывает подробное исследование, при конечной площади области начальной впадины, волны, длина которых существенно меньше ее поперечника, исходя из разных точек впадины, взаимно погашаются вследствие интерференции. Поэтому практически высокочастотная компонента, содержащая волны существенно меньшей длины, чем поперечник области начального возмущения, как бы „обрезается“ и никакого неограниченного возрастания амплитуды не получается.

С учетом сделанных замечаний (обрезание мгновенно распространяющейся компоненты и коротких волн) формула (59) дает правильную картину распространения волнения. Сначала, расходясь из первоначально локализованного „волнового пакета“, в произвольную точку наблюдения приходят длинные волны, имеющие бо́льшую скорость распространения. Затем точки наблюдения достигают более короткие волны, которые оказываются имеющими бо́льшую амплитуду. По мере удаления от центра возмущения горбы и впадины растягиваются (что отражает происходящую *дисперсию* волн). Если следить за распространением отдельного горба, то он как бы оказывается принадлежащим волне все большей длины, в соответствии с чем горбы (вообще точки одинаковой фазы движения) распространяются с *ускорением*. Величина их быстро падает. Все это и дает картину, которую можно наблюдать, бросив в воду камень.

Глава XXIV

УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

§ 1. Связь уравнения Гельмгольца с некоторыми уравнениями гиперболического и параболического типов

Рассмотрим уравнение

$$\Delta w = a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2a_1 \frac{\partial w}{\partial t} + a_2 w, \tag{1}$$

где a_0, a_1, a_2 — постоянные. При $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ оно представляет *телеграфное уравнение*. С его одномерным аналогом мы уже имели дело в ч. I. При $a_1 = a_2 = 0$, $a_0 > 0$ оно переходит в *волновое уравнение* (ч. I), при $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 > 0$ — в *уравнение теплопроводности и диффузии*, при $a_0 = 0$, $a_1 > 0$, $a_2 \neq 0$ — в *урав-*

нение диффузии для среды, в которой происходят химические или цепные реакции.

Руководствуясь методом разделения переменных, будем искать решения уравнения (1), имеющие вид

$$w(x, t) = u(x)\,v(t), \tag{2}$$

где $u(x)$ — функция только пространственных координат, а $v(t)$ — функция только времени. Подставив выражение (2) в уравнение (1), получим

$$\frac{1}{u}\Delta v = \frac{1}{v}\left(a_0\frac{d^2v}{dt^2} + 2a_1\frac{dv}{dt} + a_2 v\right).$$

Так как левая часть этого уравнения не зависит от t, а правая — от координат точки x, то должно быть

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{3}$$

$$a_0\frac{d^2v}{dt^2} + 2a_1\frac{dv}{dt} + (a_2 - k^2)\,v = 0, \tag{4}$$

где k^2 — некоторое число.

Уравнение эллиптического типа (3) называют *уравнением Гельмгольца*. Оно играет важную роль в математической физике ввиду своей простоты и большого значения приводящих к нему проблем (волновые процессы, теплопроводность, диффузия и др.).

Из формулы (2) следует, что уравнение Гельмгольца непосредственно определяет меняющуюся от точки к точке *интенсивность процессов*, происходящих во всех точках изучаемой области *по одному и тому же временно́му закону*. В частном случае, когда функция v постоянна, оно определяет *статическое состояние*. Суперпозицией решений вида (2) можно охватить практически любые пространственно-временны́е зависимости.

Возможность построить любую временну́ю зависимость (удовлетворяющую лишь некоторым общим требованиям) путем суперпозиции решений вида (2) сохранится, если вместо произвольных функций $v(t)$ рассматривать только функции, образующие в совокупности полную систему. Поэтому, без ограничения общности, вместо подстановки (2) можно рассматривать подстановку, соответствующую гармоническим колебаниям с меняющейся от точки к точке амплитудой и фазой. В этом случае, в силу теоремы Фурье, произвольная пространственно-временна́я зависимость может быть получена путем наложения колебаний *разных частот*.

Гармонические колебания удобно описывать с помощью комплексных функций вида

$$u(x)\,e^{-i\omega t} \tag{5}$$

или

$$u(x)\,e^{i\omega t}, \tag{6}$$

где ω — круговая частота колебаний, а $u(x)$ — комплексная функция координат точки x. Вещественная часть выражений (5) и (6) определяет в каждой точке x одно и то же гармоническое колебание

$$\operatorname{Re}[u(x)e^{\mp i\omega t}] = |u(x)|\cos(\omega t + \vartheta) \tag{7}$$

с амплитудой $|u(x)|$ и фазой ϑ, являющейся корнем уравнений

$$\sin\vartheta = \frac{\mp \operatorname{Im} u}{|u|}, \quad \cos\vartheta = \frac{\operatorname{Re} u}{|u|}.$$

Символы Re и Im означают, что берется соответственно вещественная или мнимая часть стоящей за ними функции. Знак минус или плюс перед Im и в выражении для $\sin\vartheta$ выбирается в зависимости от того, используется ли выражение (5) или (6). Подставив выражение (5) в выражение (1), после сокращения на множитель $e^{-i\omega t}$ придем к уравнению Гельмгольца (3) с параметром k^2, имеющим, в общем случае, комплексное значение:

$$k^2 = \omega^2 a_0 - a_2 + 2a_1 i. \tag{8}$$

При подстановке выражения (6) мы придем к уравнению Гельмгольца, комплексно сопряженному уравнению, полученному при подстановке (5). Его решения $u^*(x)$ и решения, полученные в первом случае, будут комплексно сопряжены. Однако вещественная функция $\operatorname{Re} u^*(x) e^{i\omega t}$, являющаяся решением исходного уравнения (1), в обоих случаях будет одной и той же, поскольку вещественные части комплексно-сопряженных чисел равны. Поэтому обе подстановки (5) и (6) эквивалентны, вследствие чего можно пользоваться только одной из них. Мы будем применять подстановку (5).

Наряду с однородным уравнением (1), мы будем также рассматривать *неоднородное уравнение Гельмгольца:*

$$\Delta u + k^2 u = -4\pi\rho. \tag{9}$$

Функции ρ, как мы увидим в § 4 гл. XXVII, можно приписать смысл *плотности распределения источников волн.*

Теория уравнения Гельмгольца во многом напоминает теорию уравнений Лапласа и Пуассона. В частности, для уравнения Гельмгольца также характерна постановка *граничных задач*: Дирихле, Неймана и смешанной. Эти задачи могут быть внешними или внутренними. Формулировка внутренних задач совпадает с данной в § 2 гл. XIX, в формулировку внешних задач оказывается необходимым ввести дополнительное условие, относящееся к поведению решения в бесконечно удаленной точке. Это условие мы рассмотрим ниже.

Как и при изучении уравнений Лапласа и Пуассона, нас будут интересовать регулярные решения граничных задач. Используя интегральные формулы мы, не делая особых оговорок, будем также предполагать непрерывность первых производных решений в изучаемой области вплоть до ее границы.

Кроме граничных задач, для уравнения Гельмгольца возникает и совершенно новый тип задач на определение *собственных колебаний*. С этим типом задач мы встретимся уже в следующем параграфе.

§ 2. Сферически симметричные решения уравнения Гельмгольца в ограниченной области

С характерными особенностями решений граничных задач для уравнения Гельмгольца познакомимся сначала на примере вещественных сферически симметричных решений в ограниченной области.

Используя выражение (4) гл. XIX для оператора Лапласа в сферических координатах r, θ, φ, начало которых поместим в центр симметрии искомых решений, легко найдем, что эти последние удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+k^2u=0. \tag{10}$$

Умножив это уравнение на r, после очевидных преобразований получим

$$\frac{d^2ru}{dr^2}+k^2ru=0. \tag{11}$$

Отсюда ясно, что все сферически симметричные решения уравнения Гельмгольца заключены в общем решении:

$$u(r)=A_1\frac{e^{ikr}}{r}+A_2\frac{e^{-ikr}}{r}, \tag{12}$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

Рассмотрим граничную задачу, поставленную для шара $r\leqslant r_0$:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2ru}{dr^2}+k^2ru=0, \text{ когда } r<r_0;\\&\alpha\frac{du}{dr}+\beta u=C, \text{ когда } r=r_0,\end{aligned} \tag{13}$$

где $r_0>0$, α и β — вещественные постоянные, а C — не равная нулю постоянная*.

Для решения задачи надо определить постоянные A_1 и A_2 в общем решении (12) так, чтобы оно было регулярно при $r\leqslant r_0$ и удовлетворяло заданному граничному условию.

Чтобы удовлетворить первому требованию, необходимо положить $A_2=-A_1$. Это условие вместе с тем и достаточно. В самом деле, прямым дифференцированием и применением правила Лопиталя легко убедиться, что при этом решение (12) регулярно во

---

* Изменение соотношения между вещественной и мнимой частями C изменяет фазу колебаний в начальный момент времени.