Кроме граничных задач, для уравнения Гельмгольца возникает и совершенно новый тип задач на определение *собственных колебаний*. С этим типом задач мы встретимся уже в следующем параграфе.

§ 2. Сферически симметричные решения уравнения Гельмгольца в ограниченной области

С характерными особенностями решений граничных задач для уравнения Гельмгольца познакомимся сначала на примере вещественных сферически симметричных решений в ограниченной области.

Используя выражение (4) гл. XIX для оператора Лапласа в сферических координатах r, θ, φ, начало которых поместим в центр симметрии искомых решений, легко найдем, что эти последние удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+k^2u=0. \tag{10}$$

Умножив это уравнение на r, после очевидных преобразований получим

$$\frac{d^2ru}{dr^2}+k^2ru=0. \tag{11}$$

Отсюда ясно, что все сферически симметричные решения уравнения Гельмгольца заключены в общем решении:

$$u(r)=A_1\frac{e^{ikr}}{r}+A_2\frac{e^{-ikr}}{r}, \tag{12}$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

Рассмотрим граничную задачу, поставленную для шара $r\leqslant r_0$:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2ru}{dr^2}+k^2ru=0, \text{ когда } r<r_0;\\ &\alpha\frac{du}{dr}+\beta u=C, \text{ когда } r=r_0,\end{aligned} \tag{13}$$

где $r_0>0$, α и β — вещественные постоянные, а C — не равная нулю постоянная*.

Для решения задачи надо определить постоянные A_1 и A_2 в общем решении (12) так, чтобы оно было регулярно при $r\leqslant r_0$ и удовлетворяло заданному граничному условию.

Чтобы удовлетворить первому требованию, необходимо положить $A_2=-A_1$. Это условие вместе с тем и достаточно. В самом деле, прямым дифференцированием и применением правила Лопиталя легко убедиться, что при этом решение (12) регулярно во

* Изменение соотношения между вещественной и мнимой частями C изменяет фазу колебаний в начальный момент времени.

всем пространстве. Таким образом, решения задачи (13) имеют вид:

$$u(r)=A_1\frac{1}{r}\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right), \tag{14}$$

где комплексная постоянная A_1 должна быть определена из граничного условия.

В этом параграфе рассмотрим решения задачи (13) при вещественных значениях $k^2>0$. Тогда решение (14) может быть записано в виде

$$u(r)=A\frac{\sin kr}{r}, \quad A=2iA_1. \tag{15}$$

Подставив это выражение в граничное условие задачи (13), найдем, что постоянная A должна удовлетворять соотношению

$$A\left[(\beta r_0-\alpha)\sin kr_0-\alpha kr_0\cos kr_0\right]=Cr_0^2. \tag{16}$$

Это возможно, если значения k не являются корнями уравнения:

$$\operatorname{tg} kr_0=\frac{\alpha kr_0}{\beta r_0-\alpha}. \tag{17}$$

Однако существует множество положительных значений $k_1<<k_2<\ldots<k_j<\ldots$ параметра k, при которых соотношение (17) удовлетворяется и, следовательно, при $C\neq 0$ чисел A, удовлетворяющих соотношению (16), не существует. Значения k_1, k_2, ... суть те значения k, для которых

$$\left(\alpha\frac{d}{dr}+\beta\right)\frac{\sin kr}{r}=0, \text{ когда } r=r_0. \tag{18}$$

Наряду с задачей (13) рассмотрим соответствующую ей однородную задачу:

$$\begin{gathered}\frac{d^2ru}{dr^2}+k^2ru=0, \text{ когда } r<r_0,\\ \alpha\frac{du}{dr}+\beta u=0, \text{ когда } r=r_0.\end{gathered} \tag{19}$$

При значениях k, удовлетворяющих условию (18), она имеет отличные от тождественного нуля решения вида $A_1\frac{\sin k_1 r}{r}$, $A_2\frac{\sin k_2 r}{r}$, ..., где A_1, A_2, ... — произвольные комплексные числа. При всех же других значениях k из формулы (16) следует, что $A=0$, т. е. однородная задача (19) решений, отличных от тривиального решения $u\equiv 0$, не имеет.

Таким образом, придем к следующей *альтернативе*: либо однородная задача (19) при данном значении k^2 не имеет решений, отличных от тривиального решения $u\equiv 0$, и тогда неоднородная задача (13) имеет единственное решение, даваемое формулами (15)—(17), либо однородная задача (19) имеет нетривиальное решение и тогда неоднородная задача (13) неразрешима.

Функции

$$u_m = \frac{\sin k_m r}{r}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{20}$$

являющиеся нетривиальными решениями задачи (19), называют *собственными функциями* задачи (13), а числа k_m^2, при которых однородная задача (19) имеет нетривиальные решения, — *собственными числами* задачи (13).

При изучении граничных задач для уравнений Лапласа и Пуассона мы имели дело лишь с первой частью сформулированной выше альтернативы: соответствующие однородные граничные задачи не имели непрерывных решений, отличных от тривиального: $u \equiv 0$, а решение неоднородной задачи было единственным. Это означает, что *граничные задачи для уравнений Лапласа и Пуассона не имеют собственнных функций.*

Разберемся подробнее в физическом смысле полученных результатов. Из формулы (8) следует, что при $k^2 > 0$ к уравнению (11) можно прийти в результате разделения переменных в волновом уравнении

$$\Delta w = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{21}$$

где $\frac{1}{a^2} = a_0$. При этом параметр k^2 определится формулой

$$k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}. \tag{22}$$

Если в задаче для волнового уравнения (21) рассматривается область, включающая точку $r = 0$, то общий вид регулярных решений волнового уравнения (21), представляющих гармонические колебания, получим, умножив (15) на $e^{-i\omega t}$ и взяв вещественную часть полученного выражения что даст

$$w(r, t) = \tilde{A} \frac{\sin kr}{r} \sin \omega t (+\vartheta), \tag{23}$$

где $\tilde{A}$ и ϑ — произвольные вещественные числа ($\vartheta = 0$ или кратно π, если A в (15) вещественно). Это выражение описывает колебания, амплитуда которых остается неизменной в каждой точке пространства. Такие колебания называют *стоячими волнами*. В данном случае это *сферические стоячие волны*, так как амплитуда колебаний неизменна на каждой сферической поверхности $r = \text{const}$. Амплитуда $\tilde{A} \frac{\sin kr}{r}$ удовлетворяет уравнению (11).

Систему стоячих волн (23) нагляднее представить как колебания некоторой среды. Рассмотрим, например, звуковые колебания газа (§ 3, гл. I), заключенного в сферическую оболочку. Относительное изменение плотности (конденсация) s газа при звуковых колебаниях удовлетворяет волновому уравнению (29) гл. I, следовательно, при чисто радиальных звуковых колебаниях, положив $s=\operatorname{Re} u(r) e^{-i\omega t}$, для $u(r)$ получим уравнение (11) с $k^2=\frac{\omega^2}{a^2}>0$, где a — скорость звука (§ 3, гл. I). Ввиду равенств (14) и (11) из гл. VIII и предположения о малости колебаний, давление газа $p=p_0(1+s)^\gamma \approx p_0(1+\gamma s)$, где p_0 — невозмущенное давление газа, а γ — показатель адиабаты. Отсюда относительное изменение давления газа $\frac{p-p_0}{p_0}=\gamma s$. Следовательно, положив $\frac{p-p_0}{p_0}=$ $=\operatorname{Re} \bar{p}(r) e^{-i\omega t}$, получим

$$u(r)=\frac{1}{\gamma} \bar{p}(r). \tag{24}$$

Абсолютные значения величин u и $\bar{p}$ суть амплитуды колебаний плотности и давления газа относительно равновесных значений.

Предположим, что сферическая оболочка, в которую заключен газ, эластична (мяч), причем изменениями ее натяжения можно тем самым управлять, задавая давление газа на границе $r=r_0$ соприкосновения газа с оболочкой. (Например, оболочка может быть электрически заряжена и помещена в сферическое электрическое поле. Меняя заряд такого сферического конденсатора, можно менять натяжение оболочки.) Пусть при $r=r_0$ заданы гармонические колебания давления, амплитуду которых обозначим через $\frac{1}{\gamma} C$, чему, ввиду (24), будет соответствовать граничное условие

$$u=C, \text{ когда } r=r_0. \tag{25}$$

Колебания в центре шара, очевидно, должны быть ограничены. Поэтому искомое решение u должно иметь вид (15). При условии (25) с $C \neq 0$ это возможно, если $\sin kr_0 \neq 0$, т. е. если k^2 *не равно* одному из чисел

$$k_n^2=\frac{\pi^2}{r_0^2} n^2, \quad n=1, 2, 3, \ldots \tag{26}$$

Тогда

$$u=\frac{C r_0}{\sin kr_0} \frac{\sin kr}{r}, \tag{27}$$

а относительное изменение плотности газа в шаре $r \leqslant r_0$

$$s(r, t)=\operatorname{Re} u e^{-i\omega t}=\frac{r_0}{\sin kr_0} \frac{\sin kr}{r} s(C' \cos \omega t+C'' \sin \omega t),$$

где C' и C'' — вещественная и мнимая части числа $C=C'+iC''$. Шаровые поверхности

$$r=r_n=n \frac{\pi}{k}, \quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

для которых $\sin kr=0$, образуют *узловые поверхности* конденсации. На них плотность газа сохраняет равновесное значение ρ_0, т. е. $s=0$. Если $r_1=\frac{\pi}{r}>r_0$, то узловых поверхностей $s=0$ нет. Так как *волновое число* $k=\frac{\omega}{a}$, это будет при частоте возбуждающих колебаний $\omega<\omega_1=\frac{\pi a}{r_0}$. Амплитуда колебаний в центре шара равна $\frac{|C|\,kr_0}{\sin kr_0}>|C|$ и, вообще говоря, растет, когда волновое число k приближается к значению, при котором $\sin kr_0=0$, т. е. когда k^2 приближается к одному из чисел k_n^2 из (26).

Если число k^2 равно одному из чисел k_n^2, что будет при частоте возбуждающих колебаний

$$\omega_n=n\frac{\pi}{ar_0},$$

то рассматриваемая задача с условием (25) не имеет решений, но имеет решение задача с однородным условием

$$u=0, \quad \text{когда } r=r_0, \tag{28}$$

соответствующая случаю, когда $C=0$, т. е. натяжение оболочки и, значит, давление газа на границе поддерживаются постоянными. Это решение имеет вид (15) с произвольным значением A. Числа k_n^2 из (26), по определению, являются собственными числами задачи для уравнения (11) при условии (28), а функции (15) при $k=k_n$ — собственными функциями этой задачи. Частоты ω_n называют *собственными частотами* рассматриваемой физической системы.

Физическая интерпретация полученных результатов чрезвычайно проста. Когда частота колебаний является собственной, то стоячих волн с отличной от нуля амплитудой на границе не существует, потому что граница при этой частоте является узловой поверхностью (для давления и конденсации s). Наоборот, если частота колебаний не собственная, то граница не может быть узловой поверхностью системы стоячих волн, т. е. амплитуда колебаний на границе должна быть отлична от нуля. Является или не является граница $r=r_0$ узловой поверхностью при данной частоте ω, зависит от значения скорости звука a в газе, т. е. от его свойств.

Результат совершенно аналогичен, если на границе вместо u задана комбинация $\alpha\frac{du}{dr}+\beta u$. Существуют частоты, при которых граница является узловой поверхностью для выражения $\alpha\frac{du}{dr}+\beta u$. Для этих частот система стоячих волн существует лишь при однородном граничном условии $\alpha\frac{du}{dr}+\beta u=0$. Для остальных частот граница не может быть узловой поверхностью $\alpha\frac{du}{dr}+\beta u=0$

и система стоячих волн существует лишь тогда, когда на границе $\alpha \frac{du}{dr} + \beta u \neq 0$.

Таким образом, сформулированная ранее альтернатива для решений однородной и неоднородной задачи имеет простой физический смысл.

Возникает вопрос, что произойдет, если на границе рассмотренной выше физической системы искусственно поддерживать режим колебаний, при котором $\alpha \frac{du}{dr} + \beta u \neq 0$, а частота ω равна собственной частоте ω_n, соответствующей однородному условию $\alpha \frac{du}{dr} + \beta u = 0$. Пусть для определенности $\alpha = 0$, $\beta = 1$, что соответствует условиям (25) и (28). Формально при $\omega \longrightarrow \omega_n$ амплитуда колебаний (и, следовательно, энергия) системы стоячих волн неограниченно увеличивается. Фактически, при возбуждении находившейся в равновесии системы на собственной частоте амплитуда колебаний сначала быстро растет, вследствие чего большую роль начинают играть явления, не учитываемые в исходном уравнении, в частности, превращение энергии колебаний в тепло. Эти явления останавливают дальнейший рост колебаний, а сам процесс колебаний, даже если он принимает установившийся характер, уже не описывается уравнением (11).

Стоячие волны, соответствующие однородным граничным условиям, называют *свободными колебаниями*. Их амплитуда не определяется и не ограничена условиями задачи. Стоячие волны, соответствующие неоднородным граничным условиям, могут быть названы *вынужденными колебаниями*.

Альтернатива для решений однородной и неоднородной задач, подобная указанной в этом параграфе, возникает и при постановке общих внутренних граничных задач для уравнения Гельмгольца. Однако в процессах, приводящих к граничной задаче общего вида, амплитуда колебаний зависит от нескольких координат и поэтому *вынужденные колебания могут существовать наряду со свободными*. Например, в шаре, кроме радиальных, возможны угловые колебания, которые могут не зависеть от граничных условий по r. Поэтому общая граничная задача приводит к следующей *альтернативе: либо однородная задача, соответствующая данной неоднородной задаче, не имеет решений, отличных от тривиального решения, тождественно равного нулю, и тогда неоднородная задача имеет единственное решение, либо однородная задача имеет нетривиальные решения, и тогда неоднородная задача может иметь множество решений, отличающихся друг от друга на решение однородной задачи* *.

Читателя не затруднит построить решения ряда частных граничных задач (например, для шара), подтверждающих справедливость сформулированной общей альтернативы, а также убедиться, что при наличии нетривиальных решений однородной задачи,

* Более точную формулировку см. в Дополнении к ч. II, § 6.

граничное условие неоднородной задачи не может быть совершенно произвольным. К общей формулировке рассматриваемой альтернативы мы еще вернемся в Дополнении § 6.

ЗАДАЧА

Показать, что на плоскости решения уравнения Гельмгольца, имеющие круговую симметрию, удовлетворяют уравнению Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+k^2u=0.$$

§ 3. Собственные числа и собственные функции граничной задачи общего вида. Разложения по собственным функциям

В § 2 мы изучили граничную задачу:

$$\Delta u+k^2u=f,\ \text{когда}\ x\in V-\mathfrak{F}V,\quad \alpha\frac{du}{dn}+\beta u=\psi,\ \text{когда}\ x\in\mathfrak{F}V, \tag{29}$$

в частном случае, когда область V представляла шар, а $f=0$. Мы видели, что соответствующая ей однородная задача

$$\Delta u+k^2u=0,\ \text{когда}\ x\in V-\mathfrak{F}V,\quad \alpha\frac{du}{dn}+\beta u=0,\ \text{когда}\ x\in\mathfrak{F}V, \tag{30}$$

имела нетривиальные решения при *вещественных положительных значениях параметра* k^2, образующих бесконечную возрастающую последовательность чисел

$$k_1^2,\ k_2^2,\ \ldots,\ k_m^2,\ \ldots \tag{31}$$

При этом каждому значению k_m^2 соответствовало одно нетривиальное решение u_m.

В теории интегральных уравнений доказывается, что перечисленные результаты полностью переносятся на задачу, поставленную для произвольной ограниченной области V (а также на соответствующую задачу в произвольной плоской области S) с тем лишь отличием, что одному и тому же числу k_m^2 может соответствовать не одно, а несколько *линейно-независимых* нетривиальных решений задачи.

Числа $k_m^2 (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ определяются заданием области V (или S) и граничным условием задачи (29). Как и ранее, будем называть их *собственными числами задачи* (29), а решения u_m — *собственными функциями* этой *задачи*, соответствующими (или *принадлежащими*) собственным числам k_m^2.

Коэффициенты α и β в граничном условии задачи (29) могут быть функциями точки границы. Мы будем предполагать, что граница может быть разбита на конечное число кусочно-гладких частей, на каждой из которых коэффициенты α и β сохраняют постоянные значения, неотрицательны и не равны нулю одновре-