граничное условие неоднородной задачи не может быть совершенно произвольным. К общей формулировке рассматриваемой альтернативы мы еще вернемся в Дополнении § 6.

ЗАДАЧА

Показать, что на плоскости решения уравнения Гельмгольца, имеющие круговую симметрию, удовлетворяют уравнению Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+k^2u=0.$$

§ 3. Собственные числа и собственные функции граничной задачи общего вида. Разложения по собственным функциям

В § 2 мы изучили граничную задачу:

$$\Delta u+k^2u=f, \text{ когда } x\in V-\mathfrak{F}V,\quad \alpha\frac{du}{dn}+\beta u=\psi, \text{ когда } x\in\mathfrak{F}V, \tag{29}$$

в частном случае, когда область V представляла шар, а $f=0$. Мы видели, что соответствующая ей однородная задача

$$\Delta u+k^2u=0, \text{ когда } x\in V-\mathfrak{F}V,\quad \alpha\frac{du}{dn}+\beta u=0, \text{ когда } x\in\mathfrak{F}V, \tag{30}$$

имела нетривиальные решения при *вещественных положительных значениях параметра* k^2, образующих бесконечную возрастающую последовательность чисел

$$k_1^2,\ k_2^2,\ \ldots,\ k_m^2,\ \ldots \tag{31}$$

При этом каждому значению k_m^2 соответствовало одно нетривиальное решение u_m.

В теории интегральных уравнений доказывается, что перечисленные результаты полностью переносятся на задачу, поставленную для произвольной ограниченной области V (а также на соответствующую задачу в произвольной плоской области S) с тем лишь отличием, что одному и тому же числу k_m^2 может соответствовать не одно, а несколько *линейно-независимых* нетривиальных решений задачи.

Числа $k_m^2\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ определяются заданием области V (или S) и граничным условием задачи (29). Как и ранее, будем называть их *собственными числами задачи* (29), а решения u_m — *собственными функциями* этой *задачи*, соответствующими (или *принадлежащими*) собственным числам k_m^2.

Коэффициенты α и β в граничном условии задачи (29) могут быть функциями точки границы. Мы будем предполагать, что граница может быть разбита на конечное число кусочно-гладких частей, на каждой из которых коэффициенты α и β сохраняют постоянные значения, неотрицательны и не равны нулю одновременно, причем коэффициент α либо тождественно равен нулю, либо не обращается в нуль. В последнем случае на него можно разделить граничное условие задачи (29). Вследствие этого без ограничения общности можно считать, что коэффициент α равен либо 0 либо 1. Соответственно этим значениям α можно считать, что на каждой из указанных кусочно-гладких частей границы коэффициент β равен либо 1, либо может быть отличен от 1.

Если одному собственному числу k_m^2 соответствует несколько линейно-независимых собственных функций, например, две функции u_m и u_{m+1}, то эти функции всегда можно выбрать так, чтобы они были нормированы и ортогональны в области V, т. е. чтобы соблюдались соотношения

$$\iiint\limits_V u_m u_{m+1}\,dV = 0, \quad \iiint\limits_V u_m^2\,dV = 1, \quad \iiint\limits_V u_{m+1}^2\,dV = 1. \tag{32}$$

В самом деле, пусть v_m и v_{m+1} — собственные функции, которые не обладают этим свойством. Положим

$$u_m = a v_m, \quad u_{m+1} = a_1 v_m + b v_{m+1},$$

где a, a_1, b — постоянные. Функции u_m и u_{m+1}, очевидно, также являются собственными функциями, причем при $b \neq 0$ они линейно-независимы, так как линейно-независимы функции v_m и v_{m+1}. Определим теперь постоянные a, a_1, b так, чтобы удовлетворялось первое из соотношений (32). Для определения искомых постоянных получим уравнение

$$a a_1 (v_m,\ v_m) + ab (v_m,\ v_{m+1}) = 0,$$

где

$$(v_m,\ v_m) \equiv \iiint\limits_V v_m^2\,dV, \qquad (v_m,\ v_{m+1}) \equiv \iiint\limits_V v_m v_{m+1}\,dV.$$

Отсюда заключим, что число a можно выбрать произвольно, а число

$$a_1 = b\varkappa,$$

где $\varkappa = -\frac{(v_m,\ v_{m+1})}{(v_m,\ v_m)}$. Вследствие этого можем записать:

$$u_m = a v_m, \quad u_{m+1} = b\,(\varkappa v_m + v_{m+1}).$$

Постоянные a и b всегда теперь можно выбрать так, чтобы выполнялись два последних соотношения (32), что завершает доказательство.

Если имеется третья собственная функция v_{m+2}, линейно-независимая с v_m и v_{m+1}, то этот *процесс ортогонализации* можно продолжить, положив $u_{m+2} = a_2 v_m + b_1 v_{m+1} + c v_{m+2}$, и выбрав постоянные a_2, b_1 и $c \neq 0$ так, чтобы выполнялись условия ортогональности и нормировки, и т. д.

Число линейно-независимых собственных функций, соответствующих собственному числу k_m^2, будем называть *кратностью* этого последнего и при нумерации собственных чисел считать каждое из них столько раз, какова его кратность. Например, при кратности числа k_m^2 равной двум, в ряде собственных чисел k_1^2, k_2^2, k_3^2, ... будем писать не k_m^2, а $k_m^2 = k_{m+1}^2$, k_{m+2}^2 и т. д. При этом у нас сохранится соответствие нумерации собственных функций и собственных чисел.

Покажем теперь, что *собственные функции, соответствующие различным собственным числам, взаимно ортогональны.* Воспользуемся с этой целью формулой Грина (7) гл. XVIII. Предположив, что $\alpha = 1$, и заметив, что имеет место тождество

$$v\left(\frac{du}{dn} + \beta u\right) - u\left(\frac{dv}{dn} + \beta v\right) = v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn},$$

преобразуем формулу Грина к виду:

$$\iiint\limits_V (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dV = \iint\limits_{\mathcal{F}V} \left[v\left(\frac{du}{dn} + \beta u\right) - u\left(\frac{dv}{dn} + \beta v\right)\right] dS.$$

Положив в ней $v = u_m$, $u = u_l$ и подставив значения величин из задачи (29), получим

$$(k_l^2 - k_m^2)\iiint\limits_V u_m u_l\,dV = 0.$$

Так как, по предположению, $k_l^2 \neq k_m^2$, то

$$\iiint\limits_V u_m u_l\,dV = 0 \qquad (l \neq 0), \tag{33}$$

что и утверждалось. Если $\alpha = 0$, то доказательство аналогично, причем формулой Грина следует воспользоваться в непреобразованной форме.

Так как все собственные функции определены с точностью до постоянного множителя, то их всегда можно нормировать, разделив на $\iiint\limits_V u_m^2\,dV$. Следовательно, осуществив ортогонализацию линейно-независимых собственных функций, соответствующих кратным собственным числам, можем записать общее соотношение:

$$\iiint\limits_V u_m u_l\,dV = \begin{cases} 1, & \text{когда } l = m, \\ 0, & \text{когда } l \neq m, \end{cases} \tag{34}$$

которое в этой главе всюду будем считать выполненным.

Система собственных функций является *полной*. Весьма общие результаты о полноте системы собственных функций задачи (29) принадлежат В. А. Ильину *. Приведем некоторые из них.

* УМН, 13, в. 1 (89), 1958.

Пусть f — произвольная непрерывная функция, заданная в области V, причем интегралы

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^\lambda dV \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{35}$$

имеют смысл при некотором значении числа $\lambda > 3$. Тогда:

1) если $\alpha \neq 0$, то функция f может быть разложена в ряд

$$f = \sum_{\gamma=1}^{\infty} f_\gamma u_\gamma \tag{36}$$

по собственным функциям u_γ задачи (29), сходящийся равномерно при суммировании в порядке возрастания собственных чисел во всех точках $x \in V - \mathcal{F}V$, при этом коэффициенты ряда могут быть вычислены по формулам

$$f_\gamma = \iiint\limits_V f u_\gamma dV; \tag{37}$$

2) если $\alpha = 0$, то те же результаты справедливы при дополнительном условии

$$f = 0, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V. \tag{38}$$

Если на функцию f наложить более сильные ограничения чем выше, предположив, что она непрерывна в области V вместе со своими первыми производными, а интегралы

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_l}\right)^2 dV \qquad (m, l = 1, 2, 3, \ldots)$$

имеют смысл, то ряд (36) сходится *абсолютно и равномерно*.

Аналогичная теорема разложения справедлива и для задач, поставленных в плоских областях (при этом в формуле (35) следует положить $\lambda > 2$).

Сформулированные теоремы разложения могут быть непосредственно применены для решения неоднородной граничной задачи:

$$\Delta u + k^2 u = f, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V, \ \alpha \frac{du}{dn} + \beta u = 0, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V. \tag{39}$$

Разложим функцию u в ряд

$$u = \sum_{\gamma=1}^{\infty} a_\gamma u_\gamma \tag{40}$$

по собственным функциям u_γ задачи (39). Подставив этот ряд в уравнение задачи (39) и выполнив формально почленное дифференцирование, получим

$$\Delta u + k^2 u = \sum_{\gamma=1}^{\infty} a_\gamma (\Delta u_\gamma + k^2 u_\gamma) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} a_\gamma (k_\gamma^2 - k^2) u_\gamma.$$

Сравнив ряд в правой части с разложением (36) функции f, найдем, что условия задачи (39) будут выполнены, если положить

$$a_m = \frac{f_\alpha}{k_m^2 - k^2} \equiv \frac{1}{k_m^2 - k^2} \iiint\limits_V f u_m dV. \tag{41}$$

Последнее выражение показывает, что рассматриваемый метод решения задачи (39) может быть применен, если параметр k^2 не равен ни одному из собственных чисел задачи (39). Если параметр k^2 сближать с каким-либо из собственных значений k_m^2, то, при условии, что $f_m \neq 0$, соответствующий коэффициент a_m будет неограниченно расти.

Физическое истолкование этого состоит в том, что при $k^2 = k_m^2$ в области V возникают *собственные колебания*, которые с течением времени благодаря действию возмущения f, попадающего в *резонанс* с ними, неограниченно растут. Вследствие этого *установившегося режима колебаний не наступает*, на что и указывает невозможность решения задачи (39). Практически, колебания при резонансе всегда оказываются ограниченными либо из-за фактического наличия затухания ($\operatorname{Im} k^2 > 0$), либо из-за нелинейных явлений, которые не принимались во внимание при математической формулировке задачи.

При $k^2 = k_m^2$ с помощью рассматриваемого метода нетрудно найти *нерезонансную часть колебаний*. Например, предположим, что функция f удовлетворяет условию

$$\iiint\limits_V f u_m dV = 0,$$

вследствие чего *свободные колебания не возбуждаются*. При этом допущении можно положить $a_m = 0$, а остальные коэффициенты вычислить по формуле (41). К найденному таким путем решению можно добавить любую из собственных функций задачи, соответствующих собственному числу k_m^2, причем снова получим решение. Таким образом, мы имеем здесь дело со второй частью общей альтернативы, сформулированной в конце § 2.

Для решения общей граничной задачи (29) также можно использовать метод разложения по собственным функциям. Для этого надо найти функцию u_1, непрерывную вместе со своими производными первых двух порядков и удовлетворяющую граничному условию рассматриваемой задачи. Положив $u \equiv v + u_1$, для определения функции v придем к задаче

$$\Delta v + k^2 v = f - \Delta u_1 - k^2 u_1, \quad \text{когда } x \in V - \mathcal{F} V;$$
$$\alpha \frac{dv}{dn} + \beta v = 0, \quad \text{когда } x \in \mathcal{F} V,$$

аналогичной задаче (39).

Метод решения граничных задач с помощью разложений по собственным функциям однородных задач не всегда ведет к цели, ввиду трудности разыскания собственных функций. Однако, когда возможно разделение переменных, собственные функции часто могут быть выражены через хорошо известные функции. Примеры этого мы приведем в следующем параграфе.

Мы не касались вопроса о допустимости почленного дифференцирования ряда (40). Отметим лишь, что ряд (40), коэффициенты которого вычислены по формулам (41), *сходится к решению задачи* (39) при весьма общих условиях, при этом не обязательно, чтобы он был почленно дифференцируем.

ЗАДАЧА

1. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = f, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V; \; u = 0, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V,$$

с помощью разложения по собственным функциям.

Указание. Разложение осуществить по собственным функциям однородной задачи для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V; \; u = 0, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V.$$

§ 4. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца в цилиндрических и сферических координатах

С помощью формул (3) и (4) гл. XIX найдем, что уравнение Гельмгольца имеет вид:

в цилиндрических координатах r, φ, z

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0, \tag{42}$$

в сферических координатах r, θ, φ

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + k^2 u = 0. \tag{43}$$

Уравнения (42) и (43) допускают разделение переменных. Положив в случае цилиндрических координат

$$u = u_1(r)\, u_2(\varphi)\, u_3(z), \tag{44}$$

и подставив это выражение в уравнение (42), получим

$$\frac{1}{u_1}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_1}{dr}\right) + \frac{1}{u_2}\frac{1}{r^2}\frac{d^2u_2}{d\varphi^2} + \frac{1}{u_3}\frac{d^2u_3}{dz^2} + k^2 = 0.$$

Поскольку член $\dfrac{1}{u_3}\dfrac{d^2u_3}{dz^2}$ зависит только от z, а остальные члены