Метод решения граничных задач с помощью разложений по собственным функциям однородных задач не всегда ведет к цели, ввиду трудности разыскания собственных функций. Однако, когда возможно разделение переменных, собственные функции часто могут быть выражены через хорошо известные функции. Примеры этого мы приведем в следующем параграфе.

Мы не касались вопроса о допустимости почленного дифференцирования ряда (40). Отметим лишь, что ряд (40), коэффициенты которого вычислены по формулам (41), *сходится к решению задачи* (39) при весьма общих условиях, при этом не обязательно, чтобы он был почленно дифференцируем.

ЗАДАЧА

1. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = f, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathfrak{F}V; \; u = 0, \quad \text{когда} \quad x \in \mathfrak{F}V,$$

с помощью разложения по собственным функциям.

Указание. Разложение осуществить по собственным функциям однородной задачи для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathfrak{F}V; \; u = 0, \quad \text{когда} \quad x \in \mathfrak{F}V.$$

§ 4. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца в цилиндрических и сферических координатах

С помощью формул (3) и (4) гл. XIX найдем, что уравнение Гельмгольца имеет вид:

в цилиндрических координатах r, φ, z

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0, \tag{42}$$

в сферических координатах r, θ, φ

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0. \tag{43}$$

Уравнения (42) и (43) допускают разделение переменных. Положив в случае цилиндрических координат

$$u = u_1(r)\, u_2(\varphi)\, u_3(z), \tag{44}$$

и подставив это выражение в уравнение (42), получим

$$\frac{1}{u_1}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_1}{dr}\right) + \frac{1}{u_2}\frac{1}{r^2}\frac{d^2 u_2}{d\varphi^2} + \frac{1}{u_3}\frac{d^2 u_3}{dz^2} + k^2 = 0.$$

Поскольку член $\frac{1}{u_3}\frac{d^2 u_3}{dz^2}$ зависит только от z, а остальные члены от z не зависят, то должно быть

$$\frac{1}{u_3}\frac{d^2u_3}{dz^2}+k^2=\mu^2, \qquad (45)$$

$$\frac{1}{u_1}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_1}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{u_2}\frac{d^2u_2}{d\varphi^2}=-\mu^2,$$

где μ^2 — некоторая постоянная. Умножив второе из уравнений (45) на r^2, заключим также, что должно быть

$$\frac{1}{u_2}\frac{d^2u_2}{d\varphi^2}=-\lambda^2,$$

$$\frac{r}{u_1}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_1}{dr}\right)+r^2\mu=\lambda^2,$$

где λ^2 — также постоянное число. Числа μ^2 и λ^2 называют *постоянными разделения*.

Перепишем найденные уравнения в виде

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_1}{dr}\right)+\left(\mu^2-\frac{\lambda^2}{r^2}\right)u_1=0, \qquad (46)$$

$$\frac{d^2u_2}{d\varphi^2}+\lambda^2u_2=0, \qquad (47)$$

$$\frac{d^2u_3}{dz^2}-(\mu^2-k^2)\,u_3=0. \qquad (48)$$

С помощью решений уравнений (46)—(48) могут быть построены собственные функции для областей, имеющих форму цилиндра, полого цилиндра, а также цилиндра или полого цилиндра с вырезанным по радиальным плоскостям сектором.

Построим, например, собственные функции граничной задачи для уравнения (42) при граничном условии

$$\frac{du}{dn}+\beta u=0, \text{ когда } r=r_0; \quad u=0, \text{ когда } z=\pm z_0, \qquad (49)$$

где β, r_0 и z_0 — положительные постоянные. Область V в данном случае представляет цилиндр: $r\leqslant r_0$, $|z|\leqslant z_0$.

Из условия однозначности и непрерывности собственных функций в изучаемой области следует, что по координате φ они должны иметь период 2π, вследствие чего в уравнении (47) следует положить: $\lambda^2=n^2$ ($n=1, 2, 3, \ldots$). При этом общее решение уравнения (47) будет иметь вид $u_2=\cos(n\varphi+\psi_n)$, где ψ_n — произвольная постоянная.

Решениями уравнения Бесселя (46), регулярными при $r=0$, являются функции Бесселя $J_n(\mu r)$. Поэтому положим $u_1(r)=J_n(\mu r)$. Так как на поверхности $r=r_0$ $\frac{d}{dn}=\frac{d}{dr}$, то, подставив найденное выражение $u_1(r)$ в граничное условие (49), получим уравнение

$$\alpha\mu J_n'(\mu r_0)+\beta J_n(\mu r_0)=0,$$

определяющее допустимые значения постоянной разделения μ^2. Как известно из теории бесселевых функций, это уравнение имеет бесчисленное множество различных корней: $\mu_{1n}, \mu_{2n}, \ldots, \mu_{mn}, \ldots$, которые будем считать перенумерованными в порядке их возрастания.

Обратимся, наконец, к уравнению (48). При $\mu^2=\mu_{mn}^2$, его общее решение имеет вид

$$u_3(z)=A\sin\nu z+B\cos\nu z,$$

где

$$\nu=\sqrt{k^2-\mu_{mn}^2}.$$

Подставив выражение для функции u_3 в граничное условие (49), для определения постоянных A и B получим систему однородных уравнений

$$A\sin\nu z_0+B\cos\nu z_0=0,$$
$$-A\sin\nu z_0+B\cos\nu z_0=0.$$

Нетривиальные решения этой системы существуют, если ее определитель равен нулю, т. е. если

$$\sin 2\nu z_0=0.$$

Корни этого уравнения, перенумерованные в порядке их возрастания, обозначим через ν_l. Постоянные A и B при этом могут быть представлены выражениями

$$A_l=\frac{1}{2}\cos\nu_l z_0,\quad B_l=\frac{1}{2}\sin\nu_l z_0,$$

а общее выражение функции $u_3(z)$ примет вид

$$u_3(z)=\sin\nu_l(z+z_0).$$

Перемножив найденные выражения функций u_1, u_2, u_3, найдем общее выражение собственных функций рассматриваемой задачи:

$$u_{lmn}(r,\ \varphi,\ z)=C_{lmn}J_n(\mu_{mn}r)\cos(n\varphi+\psi_n)\sin\nu_l(z+z_0),$$

где C_{lmn} — произвольные постоянные. Собственные числа задачи определяются соотношением

$$k_{lmn}^2=\nu_l^2+\mu_{mn}^2.$$

Для нас также представит интерес выписать общее выражение для решений уравнения Гельмгольца, имеющих вид: $u_1(r)\,u_2(\varphi)\,u_3(z)$ при изменении угла φ в интервале $(0,\ 2\pi)$. В этом случае $\lambda^2=n^2$, где n — целое число, и решение уравнения (47), как и выше, имеет вид: $u_2=\cos(n\varphi+\psi_n)$. Общее решение u_1 уравнения Бесселя (46) при $\lambda^2=n^2$ обозначим через $Z_n(\mu r)$. Наконец, общее решение уравнения (48) запишем в виде: $u_3=\cos(\nu z+\psi_\nu)$, где $\nu=\sqrt{k^2-\mu^2}$, а ψ_ν — произвольная постоянная. Таким образом, искомое общее выражение решения вида (44) может быть записано в виде

$$u_n = AZ_n(\mu r)\cos(n\varphi + \psi_n)\cos(\nu z + \psi_\nu) \quad (\nu \equiv \sqrt{k^2 - \mu^2}\ ), \tag{50}$$

где A — произвольная постоянная.

Перейдем к рассмотрению разделения переменных в уравнении Гельмгольца в сферических координатах. Подставив в уравнение (43) выражение $u = v_1(r)\,v_2(\theta)\,v_3(\varphi)$, после разделения переменных получим уравнения:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dv_1}{dr}\right) + (k^2r^2 - \lambda)\,v_1 = 0, \tag{51}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dv_2}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin\theta}\right)v_2 = 0, \tag{52}$$

$$\frac{d^2v_3}{d\varphi^2} + m^2v_3 = 0, \tag{53}$$

где λ и m^2 — постоянные разделения.

Найдя соответствующие решения этих уравнений, можно построить собственные функции областей, имеющих форму шара, полого шара, а также шара или полого шара с вырезом либо в виде кругового конуса с вершиной в центре шара, либо в виде части его, заключенной между двумя полуплоскостями, выходящими из одного диаметра.

Если изучаемая область охватывает полный диапазон изменения угла φ, то функция $v_3(\varphi)$ должна иметь период 2π. Общее решение уравнения (53), удовлетворяющее этому требованию, имеет вид

$$v_3(\varphi) = \cos(m\varphi + \psi_m), \tag{54}$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$, а ψ_m — произвольная постоянная.

Уравнение (52) при $\lambda = n(n+1)$, где n — целое число, представляет уравнение присоединенных полиномов Лежандра $P_{nm}(\cos\theta)$. Как мы знаем (гл. XXI), произведения присоединенных полиномов Лежандра на функции вида (54) образуют полную систему сферических функций в интервалах $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ изменения переменных φ и θ. Поэтому, для данных интервалов изменения переменных φ и θ, в состав собственных функций не может входить никаких других произведений, линейно-независимых с указанными. Следовательно, если изучаемая область охватывает полный диапазон изменения угла θ, то надо положить $\lambda = n(n+1)$.

Перейдем к уравнению (51). При $\lambda = n(n+1)$, с помощью подстановки $w = \sqrt{r}\,v_1(r)$, оно преобразуется в уравнение Бесселя полуцелого порядка:

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \left[k^2 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right] = 0, \tag{55}$$

решения которого обозначим через $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)$. Тогда

$$v_1(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}Z_{n+\frac{1}{2}}(kr).$$

Перемножив функции v_1, v_2 и v_3, придем к следующему общему выражению собственных функций для областей, в которых координаты φ и θ меняются в интервалах $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ (шар и полый шар):

$$u_{mn}(r,\ \theta,\ \varphi)=\frac{1}{\sqrt{r}}Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)P_{nm}(\cos\theta)\cos(m\varphi+\psi_m). \tag{56}$$

Конкретный выбор решения $Z_{n+\frac{1}{2}}(kz)$ и собственные числа k_l^2 определятся заданным граничным условием.

Рассмотрим, например, граничное условие

$$u=0,\ \text{когда}\ r=r_0\ \text{и}\ r=r_1\quad (r_1\neq r_0),$$

соответствующее *задаче Дирихле для полого шара* с внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом r_0. Общее решение уравнения (55) имеет вид

$$Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)=AJ_{n+\frac{1}{2}}(kr)+BY_{n+\frac{1}{2}}(kr),$$

откуда

$$v_3(r)=A\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(kr)+B\frac{1}{\sqrt{r}}Y_{n+\frac{1}{2}}(kr).$$

Подставив это выражение в заданное граничное условие, для определения постоянных A и B получим систему уравнений:

$$AJ_{n+\frac{1}{2}}(kr_0)+BY_{n+\frac{1}{2}}(kr_0)=0,$$
$$AJ_{n+\frac{1}{2}}(kr_1)+BY_{n+\frac{1}{2}}(kr_1)=0.$$

Нетривиальные решения этой системы существуют, если ее определитель равен нулю, т. е. при значениях параметра k, удовлетворяющих условию

$$J_{n+\frac{1}{2}}(kr_0)Y_{n+\frac{1}{2}}(kr_1)-J_{n+\frac{1}{2}}(kr_1)Y_{n+\frac{1}{2}}(kr_0)=0.$$

Корни этого уравнения, перенумерованные в порядке их возрастания, обозначим через k_{ln}. При $k=k_{ln}$:

$$\frac{A}{B}=-\frac{Y_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln}r_0)}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln}r_0)},$$

вследствие чего можно положить

$$v_3(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left[Y_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln}r_0)J_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln}r)-J_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln}r_0)Y_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln}r)\right].$$

Отсюда для собственных функций задачи Дирихле, поставленной в области, имеющей вид полого шара, получим выражение:

$$u_{lmn} = A_{lmn} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[Y_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln} r_0) J_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln} r) - J_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln} r_0) Y_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln} r) \right] \times \\ \times P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\varphi + \psi_m), \quad (57)$$

где A_{lmn} — произвольные постоянные.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что собственные функции граничной задачи для уравнения (42) при граничном условии

$$\alpha \frac{du}{dn} + \beta u = 0, \text{ когда } r = r_0 \text{ или } z = \pm z_0,$$

соответствующем смешанной граничной задаче в цилиндрической области, имеют вид:

$$u_{lmn}(r, \varphi, z) = A_{lmn} J_n(\mu_{mn} r) \cos(n\varphi + \psi_n) [\beta \sin \nu_l (z + z_0) + \alpha \nu_l \cos \nu_l (z + z_0)],$$

где ν_l — корень уравнения

$$\operatorname{tg} 2\nu z_0 = \frac{2\alpha\beta\nu}{\alpha^2\nu^2 - \beta^2}.$$

2. Показать, что собственные функции граничной задачи для уравнения (43) при граничном условии

$$u = 0, \text{ когда } r = r_0,$$

соответствующем задаче Дирихле для шара, имеют вид:

$$u_{lmn}(r, \theta, \varphi) = A_{lmn} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln} r) P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\varphi + \psi_m),$$

где k_{ln} — корни уравнения

$$J_{n+\frac{1}{2}}(kr_0) = 0.$$

§ 5. Сферически симметричные решения уравнения Гельмгольца в бесконечной области

Изучение *внешних* граничных задач для уравнения Гельмгольца также начнем с задач, характеризующихся *сферической симметрией*.

Рассмотрим внешнюю задачу

$$\frac{d^2 ru}{dr^2} + k^2 ru = 0, \text{ когда } r > r_0, \quad \alpha \frac{du}{dn} + \beta u = C, \text{ когда } r = r_0, \quad (58)$$

где $r_0 > 0$, α, β и C — вещественные постоянные. Условие в бесконечно удаленной точке мы установим позднее.

Предположим сначала, что параметр k^2 является вещественным положительным числом и будем искать вещественные решения задачи (58). Из выражения (12) для общего сферически симметрич-