Отсюда для собственных функций задачи Дирихле, поставленной в области, имеющей вид полого шара, получим выражение:

$$u_{lmn} = A_{lmn}\frac{1}{\sqrt{r}}\left[Y_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln}r_0)J_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln}r) - J_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln}r_0)Y_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln}r)\right]\times \times P_{nm}(\cos\theta)\cos(m\varphi+\psi_m), \quad (57)$$

где A_{lmn} — произвольные постоянные.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что собственные функции граничной задачи для уравнения (42) при граничном условии

$$\alpha\frac{du}{dn}+\beta u=0, \text{ когда } r=r_0 \text{ или } z=\pm z_0,$$

соответствующем смешанной граничной задаче в цилиндрической области, имеют вид:

$$u_{lmn}(r, \varphi, z) = A_{lmn}J_n(\mu_{mn}r)\cos(n\varphi+\psi_n)\,[\beta\sin\nu_l(z+z_0)+\alpha\nu_l\cos\nu_l(z+z_0)],$$

где ν_l — корень уравнения

$$\operatorname{tg} 2\nu z_0 = \frac{2\alpha\beta\nu}{\alpha^2\nu^2-\beta^2}.$$

2. Показать, что собственные функции граничной задачи для уравнения (43) при граничном условии

$$u=0, \text{ когда } r=r_0,$$

соответствующем задаче Дирихле для шара, имеют вид:

$$u_{lmn}(r, \theta, \varphi) = A_{lmn}\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(k_{ln}r)P_{nm}(\cos\theta)\cos(m\varphi+\psi_m),$$

где k_{ln} — корни уравнения

$$J_{n+\frac{1}{2}}(kr_0)=0.$$

§ 5. Сферически симметричные решения уравнения Гельмгольца в бесконечной области

Изучение *внешних* граничных задач для уравнения Гельмгольца также начнем с задач, характеризующихся *сферической симметрией*.

Рассмотрим внешнюю задачу

$$\frac{d^2ru}{dr^2}+k^2ru=0, \text{ когда } r>r_0, \quad \alpha\frac{du}{dn}+\beta u=C, \text{ когда } r=r_0, \quad (58)$$

где $r_0>0$, α, β и C — вещественные постоянные. Условие в бесконечно удаленной точке мы установим позднее.

Предположим сначала, что параметр k^2 является вещественным положительным числом и будем искать вещественные решения задачи (58). Из выражения (12) для общего сферически симметричного решения уравнения Гельмгольца найдем, что общее выражение вещественных решений имеет вид

$$u(r)=a\frac{\cos kr}{r}+b\frac{\sin kr}{r}, \tag{59}$$

где a, b — произвольные постоянные. Это решение регулярно во всей бесконечной области $r \geqslant r_0$ и обращается на бесконечности в нуль. Две произвольные постоянные a и b в общем случае нетрудно подобрать так, и притом бесчисленным множеством способов, чтобы удовлетворялось граничное условие задачи (58). Следовательно, задача (58) имеет бесконечное множество регулярных решений, обращающихся на бесконечности в нуль. Чтобы разобраться в смысле этих решений, рассмотрим, как в § 2, соответствующие им решения $w(r, t)$ волнового уравнения (21).

Для этого умножим общее решение (12) на $e^{-i\omega t}$, что приведет к выражению

$$A\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}+B\frac{e^{-i(kr+\omega t)}}{r}. \tag{60}$$

Подставив сюда, в соответствии с равенством (22), значение $\omega = kc$ и приняв во внимание, что числа A и B комплексны, легко найдем, что вещественная часть этого выражения при вещественном значении k может быть представлена в виде

$$A_1\frac{1}{r}\cos[k(r-ct)+\theta]+B_1\frac{1}{r}\cos[k(r+ct)+\vartheta], \tag{61}$$

где A_1 B_1, θ, ϑ — постоянные числа.

Последнее выражение, как мы сейчас увидим, соответствует двум системам сферических волн. Рассмотрим первое слагаемое суммы (61). Выражение, стоящее под знаком тригонометрической функции, представим в виде суммы: $2n\pi+\theta_0$, где n — целое число, а θ_0 — положительное число, не превосходящее 2π. Каждому значению разности $(r-ct)$ соответствуют свои значения n и θ_0. Число θ_0 будем называть *фазой волны*. Геометрическое место точек одинаковой фазы представляет для рассматриваемого слагаемого систему сферических поверхностей, концентричных поверхности $r=r_0$. На каждой из этих поверхностей значение выражения $k(r-ct)+\theta$ сохраняется постоянным. Следовательно, их радиус r с течением времени растет со скоростью c. Таким образом, первое слагаемое соответствует системе сферических волн, *расходящихся* от поверхности $r=r_0$ с фазовой скоростью c. Подобным же путем установим, что второе слагаемое соответствует системе сферических волн, *сходящихся* к поверхности $r=r_0$ из бесконечности.

Рассматривая поверхность $r=r_0$ как *источник волн*, мы должны приписать физический смысл только первому члену суммы (61), считая член, соответствующий системе волн, идущих из бесконечности, не имеющим физического смысла. Следовательно, в сумме

(60), а поэтому и в общем выражении (12) для сферически симметричного решения уравнения Гельмгольца, мы должны сохранить один член, и именно первый.

Имея в виду найти аналитический признак, позволяющий среди решений уравнения Гельмгольца выделить те, которые соответствуют *расходящимся волнам*, рассмотрим функции

$$u=\frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{и} \quad v=\frac{e^{-ikr}}{r},$$

входящие в общее решение (12). Продифференцировав эти функции по r, найдем, что они удовлетворяют дифференциальным соотношениям:

$$r\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)=-u, \qquad r\left(\frac{\partial v}{\partial r}+ikv\right)=-v.$$

Устремив r к бесконечности и заметив, что

$$\lim_{r\to\infty} u=0, \quad \lim_{r\to\infty} v=0,$$

придем к предельным соотношениям:

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)=0, \qquad \lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial v}{\partial r}+ikv\right)=0,$$

которые и устанавливают общий аналитический признак, позволяющий отличить функции u и v по их поведению на бесконечности. Действительно, легко убедиться, что если функции u и v поменять местами, то найденные предельные соотношения выполняться не будут.

Установленный признак тривиален, пока рассматриваются сферически симметричные решения уравнения Гельмгольца. Однако он имеет большое эвристическое значение при постановке общих внешних граничных задач для этого уравнения.

Прежде всего, естественно попытаться распространить его на произвольную систему сферических волн с угловым распределением амплитуд, так как это распределение не должно изменять общей закономерности убывания амплитуд вдоль радиусов. Далее, естественно предположить, что на достаточно большом удалении от ограниченной области, в которой расположен источник волн, любая система волн близка к сферической. Поэтому любая система расходящихся волн при удалении от области ее образования должна обнаружить те же закономерности, как и система сферических волн, т. е. должны соблюдаться предельные соотношения

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{r\to\infty} u=0, \tag{62}$$

причем стремление к нулю должно быть равномерным при удалении вдоль любого радиуса, начинающегося в ограниченной области. Эти соотношения, установленные впервые Зоммерфельдом, получили название *условия излучения*. Как мы покажем ниже вполне строго, условие излучения обеспечивает единственность решений внешних задач для уравнения Гельмгольца, т. е. оно играет ту же роль, как и условие обращения решения в нуль на бесконечности в отношении задач для уравнения Лапласа.

Вернемся к рассматриваемой нами задаче (58). Будем искать ее решение, удовлетворяющее условию излучения. Как мы установили, общее сферически симметричное решение, удовлетворяющее условию излучения, имеет вид

$$A\frac{e^{ikr}}{r}. \tag{63}$$

Подставив это выражение в граничное условие задачи (58), для определения постоянной A получим уравнение

$$Ae^{ikr_0}(i\alpha k+\beta)=C. \tag{64}$$

Приравняв отдельно вещественные и мнимые части, придем к системе линейных уравнений

$$A'(\beta\cos kr_0-\alpha k\sin kr_0)-A''(\beta\sin kr_0+\alpha k\cos kr_0)=C,$$
$$A'(\beta\sin kr_0+\alpha k\cos kr_0)+A''(\beta\cos kr_0-\alpha k\sin kr_0)=0,$$

где через A' и A'' обозначены вещественные и мнимые части комплексного числа A. Определитель этой системы

$$\Delta=\beta^2+\alpha^2k^2$$

при вещественных положительных значениях k^2 не обращается в нуль. Следовательно, ее решение всегда существует и единственно. В частности, при $C=0$ она имеет только тривиальное решение: $A'=A''=0$, вследствие чего однородная задача

$$\frac{d^2ru}{dr^2}+k^2ru=0,\ \text{когда}\ r>r_0,\quad \alpha\frac{du}{dn}+\beta n=0,\ \text{когда}\ r=r_0, \tag{65}$$

не имеет решений, отличных от тождественного нуля. Это означает, что *в бесконечной области свободные колебания невозможны и происходят лишь вынужденные волновые процессы.*

После простых выкладок получим

$$A'=\frac{C}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2k^2}}\cos k(r_0+r_k),\qquad A''=-\frac{C}{\sqrt{\beta_2+\alpha^2k^2}}\sin k(r_0+r_k),$$

где постоянная r_k определяется соотношением

$$\cos kr_k=\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2k^2}},\qquad \sin kr_k=\frac{\alpha k}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2k^2}}.$$

Отсюда найдем, что

$$A=A'+iA''=\frac{C}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2k^2}}e^{-ik(r_0+r_k)}. \tag{66}$$

Подставив это значение A в выражение (63), получим искомое решение:

$$u = \frac{C}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2 k^2}} \frac{e^{ik(r-r_0-r_k)}}{r}. \tag{67}$$

Это решение при вещественном значении k *всегда комплексно*.

Перейдем к рассмотрению общего случая, предположив, что k — произвольное комплексное число. Обозначив через $k \equiv k' + ik''$ корень из k^2, вещественная часть k' которого положительна, преобразуем общее выражение (12) для сферически симметричного решения к виду

$$Ae^{-k''r}\frac{e^{ik'r}}{r} + Be^{k''r}\frac{e^{-ik'r}}{r}. \tag{68}$$

Легко убедиться, что системе расходящихся волн по-прежнему соответствует первый член этой суммы:

$$Ae^{-ik''r}\frac{e^{ik'r}}{r}. \tag{69}$$

Однако, в зависимости от знака k'', он либо неограниченно убывает, либо неограниченно растет на бесконечности.

Чтобы разобраться в смысле этого результата, воспользуемся известным положением теории колебаний, согласно которому *поток энергии*, переносимый волной сквозь площадку dS, нормальную направлению ее распространения, равен $q|u|^2 dS$, где $|u|$ — модуль амплитуды волны, а q — постоянная, зависящая от выбора единиц измерения.

Выше, для $k''=0$, мы нашли решение (67), при котором

$$|u|^2 = \frac{1}{r^2}\frac{C^2}{\beta^2+\alpha^2 k^2}.$$

Для этого значения $|u|^2$ поток энергии сквозь любую шаровую поверхность $r=\mathrm{const}$ постоянной фазы волны равен $4\pi\frac{qC^2}{\beta^2+\alpha^2k^2}$, т. е. не зависит от r. Иначе говоря, энергия волны при ее распространении сохраняется В отличие от этого, для $k''\neq 0$ из выражения (69) получим

$$|u|^2 = \frac{|A|^2}{r^2}e^{-2k''r}.$$

Если $k''>0$, то при возрастании r величина $|u|^2$ убывает экспоненциально, то есть намного быстрее, чем растет площадь $4\pi r^2$ шаровых поверхностей постоянной фазы. Следовательно, происходит *рассеяние энергии* волны, притом по экспоненциальному закону. Если же $k''<0$, то энергия волны, по мере удаления от области ее сбразования, экспоненциально возрастает. Последний процесс не имеет физического смысла для бесконечного пространства и поэтому должен быть исключен из рассмотрения.

Таким образом, величина k'' представляет характеристику рассеяния энергии в среде, являющейся носителем волнового процесса, в связи с чем ее называют *комплексным поглощением среды.*

Полезно установить связь между знаком мнимой части параметра k^2 и знаком комплексного поглощения. Для этого представим параметр k^2 в тригонометрической форме:

$$k^2 = |k^2| (\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Два значения корня из этого выражения равны $\pm\sqrt{|k^2|}\ (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$. Выше через k мы обозначили корень с положительной вещественной частью. Так как $\cos\vartheta \geqslant 0$, то

$$k = \sqrt{|k^2|}(\cos\vartheta + i \sin\vartheta).$$

При $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ функции $\sin\vartheta$ и $\sin 2\vartheta$ одного знака. Следовательно, знак комплексного поглощения совпадает со знаком мнимой части $\mathrm{Im}k^2$ параметра k^2. В силу этого для реальных сред $Imk^2 \geqslant 0$.

Условие излучения для сред с положительным комплексным поглощением, очевидно, может быть определено, как *условие экспоненциального стремления решения к нулю* при неограниченном удалении от источника волн. Можно сформулировать условие излучения также в виде соотношений

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to\infty} e^{|k''|r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0, \\ &\lim_{r\to\infty} e^{|k''|}u = 0, \end{aligned} \tag{70}$$

переходящих при $k''=0$ в соотношения (62). Читателю предлагается самостоятельно убедиться в правильности последней формулировки.

Найдем теперь выражение для решения задачи (58) при $k'' \neq 0$, удовлетворяющее граничному условию задачи. Подставив выражение (69) в граничное условие, для определения постоянной A получим уравнение

$$Ae^{-k''r_0}e^{ik'r_0}(i\alpha k' + \beta - \alpha k'') = C. \tag{71}$$

Это уравнение может быть получено из уравнения (64) путем замен:

$$A \to Ae^{-k''r_0},\ kr_0 \to k'r_0,\ \alpha k \to \alpha k',\ \beta \to \beta - \alpha k''.$$

Следовательно, решение задачи (58) для рассматриваемого случая можно получить, произведя аналогичные замены в выражении (67), что даст

$$u = \frac{C}{\sqrt{(\beta - \alpha k'')^2 + \alpha^2 k'^2}} e^{-k''r_0} \frac{e^{ik'(r - r_0 - r_k)}}{r}, \tag{72}$$

где постоянная r_k удовлетворяет соотношениям:

$$\cos k' r_k = \frac{\beta - \alpha k''}{\sqrt{(\beta - \alpha k'')^2 + \alpha^2 k'^2}}, \qquad \sin k' r_k = \frac{\alpha k'}{\sqrt{(\beta - \alpha k'')^2 - \alpha^2 k'^2}}.$$

Выражение $(\beta - \alpha k'')^2 + \alpha^2 k'^2$, стоящее в знаменателе решения (72), является определителем системы линейных уравнений, определяющих комплексную постоянную A. При $k'' \neq 0$ и любых вещественных значениях α и β этот определитель не обращается в нуль. Следовательно, задача (58) имеет единственное решение, а соответствующая ей однородная задача (65) решений, отличных от тождественного нуля, не имеет.

Остановимся вкратце на случае двух измерений. Решения уравнения Гельмгольца, обладающие круговой симметрией, удовлетворяют уравнению Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + k^2 u = 0. \tag{73}$$

Общее решение этого уравнения может быть представлено в форме

$$u(r) = AH_0^{(1)}(kr) + BH_0^{(2)}(kr), \tag{74}$$

где A и B — произвольные постоянные, а $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$ — функции Ханкеля первого и второго рода (гл. XIII, § 6). Эта форма решения соответствует решению для пространства, выраженному через показательные функции e^{ikr}, e^{-ikr}. В вещественной форме (при k вещественном) решение (74) выражается с помощью функций Бесселя и Вебера:

$$u(r) = aJ_0(kr) + bY_0(kr),$$

где a и b — вещественные постоянные.

Частное решение $J_0(kr)$ $\left(\text{как и } \frac{\sin kr}{r} \text{ в трехмерном случае}\right)$, регулярно на всей плоскости, решение же $Y_0(kr)$ обращается в точке $r=0$ в бесконечность порядка $\ln\frac{1}{r}$. Пользуясь асимптотическими разложениями функций Ханкеля (64) гл. XIII:

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(kr) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}, \\ H_0^{(2)}(kr) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}, \end{aligned} \tag{75}$$

найдем, что рассматриваемые решения стремятся на бесконечности к нулю.

Пользуясь формулами (74) и (75), легко построить системы решений, соответствующие расходящимся и сходящимся волнам.

При этом система волн, расходящихся на бесконечности, при вещественном значении параметра k может быть выделена с помощью *условия излучения*:

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} u = 0. \tag{76}$$

Читателю предлагается вывести условие излучения на плоскости при произвольном комплексном значении параметра k.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что если временной множитель брать не в форме $e^{-i\omega t}$, а в форме $e^{i\omega t}$, то в условиях излучения (62) и (76) знак минус перед членом iku следует изменить на плюс.

2. Показать, что условию излучения (76) удовлетворяет функция Ханкеля $H_0^{(1)}(kr)$ первого рода, а функция Ханкеля $H_0^{(2)}(kr)$ второго рода — не удовлетворяет.

§ 6. Интегральные формулы

В § 2 и 5 мы видели, что функция

$$\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{77}$$

где r — радиус-вектор сферической системы координат, при $r \neq 0$ является решением уравнения Гельмгольца. Под r в выражении (77), очевидно, можно понимать и расстояние от переменной точки ξ до произвольной фиксированной точки x. При этом выражение (77) для всех $\xi \neq x$ является решением уравнения Гельмгольца $\Delta_\xi u + k^2 u = 0$, записанного в произвольных координатах. Ввиду симметрии выражения (77) относительно координат точек ξ и x, оно будет удовлетворять и уравнению $\Delta_x u + k^2 u = 0$, в котором дифференцирование производится по координатам точки x.

Функцию

$$L(\xi, x) \equiv \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{ikr}}{r} + \varphi(\xi, x)\right], \tag{78}$$

где $\varphi(\xi, x)$ — решение уравнения Гельмгольца $\Delta_\xi \varphi + k^2 \varphi = 0$, регулярное в некоторой области V, будем называть *фундаментальным решением* этого уравнения в области V.

При $\xi = x$ порядок обращения в бесконечность фундаментальных решений уравнений Гельмгольца и Лапласа одинаков. Вследствие этого фундаментальные решения уравнения Гельмгольца удовлетворяют ряду тех же интегральных соотношений, что и уравнения Лапласа. Мы будем приводить эти соотношения без доказательств, которые почти дословно совпали бы с проведенными в гл. XIX и XX. Опираясь на формулу Грина (7) гл. XVIII, путем предельного перехода придем к соотно-