При этом система волн, расходящихся на бесконечности, при вещественном значении параметра k может быть выделена с помощью *условия излучения*:

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)=0, \qquad \lim_{r\to\infty}u=0. \tag{76}$$

Читателю предлагается вывести условие излучения на плоскости при произвольном комплексном значении параметра k.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что если временной множитель брать не в форме $e^{-i\omega t}$, а в форме $e^{i\omega t}$, то в условиях излучения (62) и (76) знак минус перед членом iku следует изменить на плюс.

2. Показать, что условию излучения (76) удовлетворяет функция Ханкеля $H_0^{(1)}(kr)$ первого рода, а функция Ханкеля $H_0^{(2)}(kr)$ второго рода — не удовлетворяет.

§ 6. Интегральные формулы

В § 2 и 5 мы видели, что функция

$$\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{77}$$

где r — радиус-вектор сферической системы координат, при $r\neq 0$ является решением уравнения Гельмгольца. Под r в выражении (77), очевидно, можно понимать и расстояние от переменной точки ξ до произвольной фиксированной точки x. При этом выражение (77) для всех $\xi\neq x$ является решением уравнения Гельмгольца $\Delta_\xi u+k^2u=0$, записанного в произвольных координатах. Ввиду симметрии выражения (77) относительно координат точек ξ и x, оно будет удовлетворять и уравнению $\Delta_x u+k^2u=0$, в котором дифференцирование производится по координатам точки x.

Функцию

$$L(\xi,\ x)\equiv\frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{ikr}}{r}+\varphi(\xi,\ x)\right], \tag{78}$$

где $\varphi(\xi,\ x)$ — решение уравнения Гельмгольца $\Delta_\xi\varphi+k^2\varphi=0$, регулярное в некоторой области V, будем называть *фундаментальным решением* этого уравнения в области V.

При $\xi=x$ порядок обращения в бесконечность фундаментальных решений уравнений Гельмгольца и Лапласа одинаков. Вследствие этого фундаментальные решения уравнения Гельмгольца удовлетворяют ряду тех же интегральных соотношений, что и уравнения Лапласа. Мы будем приводить эти соотношения без доказательств, которые почти дословно совпали бы с проведенными в гл. XIX и XX. Опираясь на формулу Грина (7) гл. XVIII, путем предельного перехода придем к соотношению

$$\iint\limits_{\mathcal{F}V}\left(L\frac{du}{dn}-u\frac{dL}{dn}\right)dS_\xi=\begin{cases}0, & \text{когда } x\in R_E-V,\\ u(x), & \text{когда } x\in V-\mathcal{F}V,\end{cases}\qquad(79)$$

где R_E — трехмерное пространство, V — ограниченная область, а $u(x)$ — регулярное решение уравнения Гельмгольца, непрерывное в области V вместе со своими первыми производными. Эта формула аналогична формуле (44) гл. XIX.

Предположим теперь, что функция $u(x)$ является регулярным решением уравнения Гельмгольца в *бесконечной* области V и удовлетворяет на бесконечности условию излучения (62). Пусть V_σ — конечная часть области V, содержащаяся внутри некоторого шара σ. Применим в области V_σ формулу (79), положив в ней $L(\xi,\ x)=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}$. Это даст:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\mathcal{F}V}\left[\frac{e^{ikr}}{r}\frac{du}{dn}-u\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right]dS+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\mathcal{F}\sigma}\left[\frac{e^{ikr}}{r}\frac{du}{dn}-u\frac{d}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right]dS=$$
$$=\begin{cases}0, & \text{когда } x\in R_E-V_\sigma,\\ u(x), & \text{когда } x\in V_\sigma-\mathcal{F}V_\sigma.\end{cases}\qquad(80)$$

Интеграл по $\mathcal{F}\sigma$ может быть записан в виде суммы:

$$\iint\limits_{\mathcal{F}\sigma}u\frac{e^{ikr}}{r^2}dS+\iint\limits_{\mathcal{F}\sigma}\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)dS.$$

Так как функция u удовлетворяет условию излучения, то при неограниченном возрастании радиуса поверхности $\mathcal{F}\sigma$ оба члена этой суммы стремятся к нулю. Рассмотрим, например, второй из них. Приняв во внимание, что в силу условия излучения $\operatorname{Im}k\geqslant 0$, убедимся, что

$$\left|\iint\limits_{\mathcal{F}\sigma}\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)dS\right|\leqslant\left|r\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)\right|_H\iint\limits_{\mathcal{F}\sigma}\frac{dS}{r^2},$$

где $\left|r\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)\right|_H$ — наибольшее абсолютное значение $r\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)$ на $\mathcal{F}\sigma$. Поскольку интеграл $\iint\limits_{\mathcal{F}\sigma}\frac{dS}{r^2}$ ограничен, то при неограниченном возрастании радиуса поверхности $\mathcal{F}\sigma$ правая часть этого неравенства стремится к нулю по условию излучения. Доказательство стремления к нулю первого члена суммы аналогично. Таким образом, перейдя в соотношении (80) к пределу при неограниченном возрастании радиуса поверхности $\mathfrak{F}\sigma$, получим

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\mathfrak{F}V}\left[\frac{e^{ikr}}{r}\frac{du}{dn}-u\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right]dS=\begin{cases}0, & \text{когда } x\in R_E-V,\\ u(x), & \text{когда } x\in V-\mathfrak{F}V.\end{cases} \tag{81}$$

Опираясь на эту формулу, покажем, что регулярные решения уравнения Гельмгольца, удовлетворяющие условию излучения, убывают на бесконечности не медленнее, чем $\frac{1}{r}$. Для этого примем за $\mathfrak{F}V$ шаровую поверхность с центром в произвольно выбранной точке ζ. Радиус поверхности $\mathfrak{F}V$ выберем настолько большим, чтобы в бесконечной области V, имеющей поверхность $\mathfrak{F}V$ своей границей, функция u была всюду определена и являлась регулярным решением уравнения Гельмгольца. Пусть R — расстояние между точками ζ и x, r_1 — расстояние между точкой ζ и переменной точкой $\xi\in\mathfrak{F}V$, а ψ — угол между отрезками $\overline{\zeta x}$ и $\overline{\zeta\xi}$. Тогда, при $R\to\infty$:

$$r\equiv\sqrt{R^2+r_1^2-2Rr_1\cos\psi}=R\sqrt{1+\frac{r_1^2}{R^2}-2\frac{r_1}{R}\cos\psi}=$$
$$=R\,[1+o(1)],$$

где через $o(1)$ обозначена совокупность бесконечно малых членов. Пользуясь этим выражением, запишем формулу (81) в виде

$$u(x)=\frac{e^{ikr}}{R}\left[\iint\limits_{\mathfrak{F}V}\left(e^{ikr_1\cos\psi}\frac{du}{dn}-u\frac{d}{dn}e^{ikr_1\cos\psi}\right)dS\right]\times$$
$$\times[1+o(1)]\qquad(x\in V-\mathfrak{F}V).$$

Заметив, что интеграл в правой части, взятый по ограниченной поверхности $\mathfrak{F}V$, заведомо ограничен, и что величины R и r одного порядка, придем к следующей оценке, справедливой при больших значениях r:

$$u(x)=e^{-k''r}O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{82}$$

где $O\left(\frac{1}{r}\right)$ — множитель одного порядка с $\frac{1}{r}$, а $k''=\operatorname{Im}k$. Эта формула и доказывает высказанное утверждение.

Теперь формула (81) может быть обобщена на случай произвольного фундаментального решения $L(\xi, x)$. В самом деле, при выводе этой формулы мы опирались на то, что фундаментальное решение $\frac{e^{ikr}}{r}$ убывает на бесконечности, как $\frac{1}{r}$. Но, по доказанному, этим свойством должно обладать и любое фундаментальное решение. Вследствие этого, для бесконечной области получим формулу, совпадающую с формулой (79).

Наконец, предположим, что u — решение уравнения Гельмгольца, регулярное во всем пространстве и удовлетворяющее на бесконечности условию излучения. Пусть x — произвольная точка и σ — шар радиуса r с центром в точке x. Выразим с помощью формулы (79) значение функции u в точке x через ее значения на поверхности шара σ. Заметив, что на поверхности шара σ $\frac{d}{dn}=\frac{\partial}{\partial r}$, получим

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\mathcal{F}\sigma}\left[\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right]dS=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\mathcal{F}\sigma}\frac{e^{ikr}}{r^2}\left[u+r\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)\right]dS.$$

Интеграл в правой части при $r\to\infty$ стремится к нулю, а так как значение $u(x)$ не зависит от r, то $u(x)\equiv 0$.

Ввиду произвольности выбора точки x отсюда следует, что *решение уравнения Гельмгольца, регулярное во всем пространстве и удовлетворяющее условию излучения, тождественно равно нулю.* На языке физики это значит, что в отсутствии *источников излучения* (точки, в которых решение нерегулярно) существование стационарной системы волн, расходящихся на бесконечности, невозможно.

По аналогии с ньютоновскими потенциалами образуем далее функции

$$v(x)\equiv\iiint\limits_V\rho\frac{e^{ikr}}{r}dV, \tag{83}$$

$$\bar{v}(x)\equiv\iint\limits_S\bar{\rho}\frac{e^{ikr}}{r}dS, \tag{84}$$

$$\bar{\bar{v}}(x)\equiv\iint\limits_S\bar{\bar{\rho}}\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)dS, \tag{85}$$

которые будем называть *колебательными потенциалами*, соответственно *объемным, простого слоя и двойного слоя.* Так как множители e^{ikr} не изменяют условий сходимости интегралов в точках $r=0$, все аналитические свойства ньютоновских потенциалов переносятся и на колебательные потенциалы. Перечислим основные свойства этих последних.

Объемный колебательный потенциал (83) с ограниченной интегрируемой плотностью непрерывен во всем пространстве; его первые производные можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла, причем, если плотность ρ равномерно ограничена, то первые производные непрерывны во всем пространстве; в точках, в которых плотность ρ дифференцируема, вторые производные потенциала существуют и удовлетворяют неоднородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta v+k^2v=-4\pi\rho.$$

Колебательный потенциал простого слоя (84) непрерывен во всем пространстве; в точках, не принадлежащих слою, он дифференцируем неограниченное число раз и удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца $\Delta\bar{v}+k^2\bar{v}=0$; в точках ζ слоя его нормальные производные удовлетворяют соотношениям

$$\frac{d\bar{v}}{dn_e}=\frac{d\bar{v}}{dn_0}+2\pi\rho(\zeta),\quad \frac{d\bar{v}}{dn_i}=\frac{d\bar{v}}{dn_0}-2\pi\rho(\zeta), \tag{86}$$

где $\frac{d\bar{v}}{dn_e}$ и $\frac{d\bar{v}}{dn_i}$ — предельные значения нормальной производной при приближении к точке ζ соответственно извне и изнутри поверхности S, а

$$\frac{d\bar{v}}{dn_0}=\left[\iint\limits_S \bar{\rho}\,\frac{d}{dn_x}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)dS\right]_{x=\zeta}$$

— прямое значение нормальной производной в точке ζ слоя.

Колебательный потенциал двойного слоя (85) в точках вне слоя дифференцируем неограниченное число раз и удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta\bar{\bar{v}}+k^2\bar{\bar{v}}=0$, в точках ζ слоя он удовлетворяет соотношениям

$$\bar{\bar{v}}_e(\zeta)=\bar{\bar{v}}_0(\zeta)-2\pi\rho(\zeta),\quad \bar{\bar{v}}_i(\zeta)=\bar{\bar{v}}_0(\zeta)+2\pi\rho(\zeta), \tag{87}$$

где $\bar{\bar{v}}_e(\zeta)$ и $\bar{\bar{v}}_i(\zeta)$ — предельные значения потенциала при приближении к точке ζ соответственно извне и изнутри S, а $\bar{\bar{v}}_0(\zeta)$ — прямое значение потенциала в точке ζ.

Граничные задачи для уравнения Гельмгольца, как и задачи для уравнений Лапласа и Пуассона, допускают построение *функций Грина*, с помощью которых решение задачи может быть записано в интегральной форме. Непосредственно эти функции Грина описывают поля, созданные *точечными источниками*.

Рассмотрим для примера соотношения, определяющие функцию Грина задачи Дирихле:

$$\Delta u+k^2u=0,\ \text{когда}\ x\in V-\mathcal{F}V,\quad u=\psi,\ \text{когда}\ x\in\mathcal{F}V. \tag{88}$$

Определим функцию $\varphi(\xi, x)$, входящую в общее выражение фундаментального решения (78), как решение граничной задачи:

$$\Delta\varphi+k^2\varphi=0,\quad \text{когда}\quad x,\ \xi\in V-\mathcal{F}V,$$
$$\varphi=-\frac{e^{ikr}}{r},\quad \text{когда}\ \xi\in\mathcal{F}V,\quad x\in V-\mathcal{F}V.$$

В этом случае фундаментальное решение (78) обратится в нуль на границе рассматриваемой области и формула (79), с учетом граничного условия задачи (88), даст:

$$u(x)=-\iint\limits_{\mathcal{F}V}\psi\,\frac{dG}{dn}\,dS_\xi, \tag{89}$$

где

$$G = G(\xi,\ x) \equiv \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{ikr}}{r} + \varphi(\xi,\ x)\right].$$

Фундаментальное решение $G(\xi,\ x)$ и представляет *функцию Грина* задачи (88). Можно показать, что функция Грина $G(\xi,\ x)$ существует, если решение задачи (88) единственно. В противном случае все же можно построить функцию $G(\xi,\ x)$, которую называют *обобщенной функцией Грина*, такую, что формула (89) будет справедлива. Более подробно об этом сказано в Дополнении к ч. II.

ЗАДАЧИ

1. Прямым дифференцированием показать, что функция $\frac{e^{ikr}}{r}$, где $r = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}(x_\alpha - \xi_\alpha)^2}$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца.

2. Показать, что в отличие от гармонических функций производные регулярных решений уравнения Гельмгольца могут не удовлетворять условию

$$\lim_{r\to\infty} r^2 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| < \infty \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

3. Показать, что граничная задача для неоднородного уравнения $\Delta u + k^2 u = f$ может быть приведена к граничной задаче для однородного уравнения $\Delta u_1 + k^2 u_1 = 0$.

Указание: Следует положить $u = u_1 + v$, где v — объемный колебательный потенциал с плотностью $\rho = -\frac{1}{4\pi} f$.

4. Показать, что функция Грина граничной задачи (88) симметрична относительно своих аргументов, т. е. $G(\xi,\ x) = G(x,\ \xi)$.

5. Предположив, что решение u граничной задачи Дирихле $\Delta u + k^2 u = 0$, когда $x \in V - \mathcal{F}V$; $u = \psi$, когда $x \in \mathcal{F}V$ можно представить в виде колебательного потенциала двойного слоя:

$$u = \iint\limits_{\mathcal{F}V} \overline{\overline{\rho}}\, \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) dS,$$

показать, что плотность $\overline{\overline{\rho}}$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$2\pi\overline{\overline{\rho}} + \iint\limits_{\mathcal{F}V} \overline{\overline{\rho}}\, \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) dS = \psi.$$

Указание. Воспользоваться формулой (79).

6. Пусть $G(\xi,\ x)$ — функция Грина оператора Лапласа (т. е. $\Delta_\xi G(\xi,\ x) = 0$, когда $\xi \neq x$), удовлетворяющая однородному граничному условию

$$\alpha \frac{dG}{dn_\xi} + \beta G = 0, \text{ когда } \xi \in \mathcal{F}V,\ x \in V - \mathcal{F}V.$$

Показать, что решение u однородной граничной задачи для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V;\ \alpha \frac{du}{dn} + \beta u = 0, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V,$$

удовлетворяет однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$u-k^2\iiint\limits_V Gu\,dV_\xi=0.$$

Указание. Записав уравнение Гельмгольца в виде $\Delta u=-k^2u$, воспользоваться формулой (67) гл. XIX.

7. Предположив, что u — регулярное решение уравнения Гельмгольца в ограниченной области V, имеющее в этой области непрерывные первые производные, вывести формулу

$$\iiint\limits_V\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2-k^2u^2\right]dV=\iint\limits_{\mathcal{F}V}u\frac{du}{dn}\,dS.$$

Опираясь на эту формулу, доказать единственность решений задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца при $k^2<0$ в классе функций, непрерывных в области V вместе со своими первыми производными.

Указание. В формуле Грина (7) гл. XVIII произвести замены:

$$u\longrightarrow u^2,\quad u\longrightarrow 1.$$

§ 7. Разложения в ряды по частным решениям уравнения Гельмгольца в бесконечной области

Введем сферические координаты r, θ, φ.

Пусть $u(r,\theta,\varphi)$ — решение уравнения Гельмгольца, регулярное при $r\geqslant r_0$ и удовлетворяющее условию излучения. В области регулярности функция u может быть разложена в ряд по сферическим функциям (гл. XXI, § 3):

$$u=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left\{a_{\alpha 0}(r)\,P_\alpha(\cos\theta)+\sum_{\beta=1}^{\alpha}\left[a_{\alpha\beta}(r)\cos\beta\varphi+b_{\alpha\beta}(r)\sin\beta\varphi\right]P_{\alpha\beta}(\cos\theta)\right\}. \tag{90}$$

Покажем, что с точностью до независящего от координат множителя, все коэффициенты $a_{\alpha 0}$, $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ этого ряда для каждого фиксированного $\alpha=n$ равны функции

$$h_n(kr)=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\,H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 0\leqslant\beta\leqslant n), \tag{91}$$

где $H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ — функция Ханкеля первого рода полуцелого порядка.

Воспользуемся с этой целью частным решением (56) уравнения Гельмгольца в сферических координатах, положив в нем: $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)=H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)$. При обозначении (91) оно примет вид

$$u_{nm}=h_n(kr)\,P_{nm}(\cos\theta)\cos(m\varphi+\psi_m)\quad(0\leqslant m\leqslant n), \tag{92}$$