удовлетворяет однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$u-k^2\iiint\limits_V Gu\,dV_\xi=0.$$

Указание. Записав уравнение Гельмгольца в виде $\Delta u=-k^2u$, воспользоваться формулой (67) гл. XIX.

7. Предположив, что u — регулярное решение уравнения Гельмгольца в ограниченной области V, имеющее в этой области непрерывные первые производные, вывести формулу

$$\iiint\limits_V\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2-k^2u^2\right]dV=\iint\limits_{\mathcal{F}V}u\frac{du}{dn}\,dS.$$

Опираясь на эту формулу, доказать единственность решений задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца при $k^2<0$ в классе функций, непрерывных в области V вместе со своими первыми производными.

Указание. В формуле Грина (7) гл. XVIII произвести замены:

$$u\longrightarrow u^2,\quad u\longrightarrow 1.$$

§ 7. Разложения в ряды по частным решениям уравнения Гельмгольца в бесконечной области

Введем сферические координаты r, θ, φ.

Пусть $u(r,\theta,\varphi)$ — решение уравнения Гельмгольца, регулярное при $r\geqslant r_0$ и удовлетворяющее условию излучения. В области регулярности функция u может быть разложена в ряд по сферическим функциям (гл. XXI, § 3):

$$u=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left\{a_{\alpha0}(r)P_\alpha(\cos\theta)+\sum_{\beta=1}^{\alpha}\left[a_{\alpha\beta}(r)\cos\beta\varphi+\right.\right.$$
$$\left.\left.+b_{\alpha\beta}(r)\sin\beta\varphi\right]P_{\alpha\beta}(\cos\theta)\right\}. \qquad (90)$$

Покажем, что с точностью до независящего от координат множителя, все коэффициенты $a_{\alpha0}$, $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ этого ряда для каждого фиксированного $\alpha=n$ равны функции

$$h_n(kr)=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 0\leqslant\beta\leqslant n), \qquad (91)$$

где $H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ — функция Ханкеля первого рода полуцелого порядка.

Воспользуемся с этой целью частным решением (56) уравнения Гельмгольца в сферических координатах, положив в нем: $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)=H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)$. При обозначении (91) оно примет вид

$$u_{nm}=h_n(kr)P_{nm}(\cos\theta)\cos(m\varphi+\psi_m)\quad(0\leqslant m\leqslant n), \qquad (92)$$

где положено $P_{n0}(\cos\theta) \equiv P_n(\cos\theta)$. Легко убедиться, что функция u_{nm} является решением уравнения Гельмгольца в сферических координатах, регулярным в любой области, не содержащей точки $r=0$, и удовлетворяющим условию излучения.

Пусть Σ_0 и Σ — две шаровых поверхности радиусов r_0 и $r > r_0$, с центром в точке $r=0$. Применим в области V, заключенной между поверхностями Σ_0 и Σ, к функциям u и u_{nm} формулу Грина (7) гл. XVIII. Так как функции u и u_{nm} по предположению удовлетворяют уравнению Гельмгольца, то

$$\iiint\limits_V (u\,\Delta u_{nm} - u_{nm}\,\Delta u)\,dV = 0,$$

поэтому

$$\iint\limits_{\Sigma_0} \left(u\,\frac{du_{nm}}{dn} - u_{nm}\frac{du}{dn}\right) dS = \iint\limits_{\Sigma} \left(u_{nm}\frac{\partial u}{\partial r} - u\,\frac{\partial u_{nm}}{\partial r}\right) dS. \tag{93}$$

При больших значениях r, в силу условия излучения и оценки (82):

$$\frac{\partial u}{\partial r} = iku + 0\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \frac{\partial u_{nm}}{\partial r} = iku_{nm} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$u = 0\left(\frac{1}{r}\right), \qquad u_{nm} = 0\left(\frac{1}{r}\right),$$

откуда

$$u_{nm}\frac{\partial u}{\partial r} - u\,\frac{\partial u_{nm}}{\partial r} = 0\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

Поэтому интеграл в правой части соотношения (93) при $r \to \infty$ стремится к нулю, а так как интеграл в левой части этого соотношения от r не зависит, то

$$\iint\limits_{\Sigma_0} \left(u_{nm}\frac{\partial u}{\partial r} - u\,\frac{\partial u_{nm}}{\partial r}\right) dS \equiv 0.$$

Подставив сюда выражения функций u и u_{nm} из соотношений (90) и (92) и приняв во внимание соотношения ортогональности сферических функций (гл. XXI, § 2), после интегрирования по Σ получим

$$h_n(kr)\frac{\partial}{\partial r}\left[C_{nm}a_{nm}(r) + D_{nm}b_{nm}(r)\right] =$$
$$= \left[C_{nm}a_{nm}(r) + D_{nm}b_{nm}(r)\right]\frac{\partial}{\partial r}h_n(kr) \qquad (0 \leqslant m \leqslant n),$$

или, в силу произвольности значений C_{nm} и D_{nm},

$$h_n(kr)\frac{\partial a_{nm}(r)}{\partial r} = a_{nm}\frac{\partial h_n(kr)}{\partial r}, \quad h_n(kr)\frac{\partial b_{nm}(r)}{\partial r} = b_{nm}(r)\frac{\partial h_n(kr)}{\partial r},$$

откуда вытекает, что $h_n(kr)$, $a_{nm}(r)$, $b_{nm}(r)$ отличаются друг от друга только независящим от r множителем, так как в противном случае эти равенства соблюдаться не могут. Таким образом, наше утверждение доказано.

Положив
$$a_{nm}(r)=A_{nm}h_n(kr), \quad b_{nm}(r)=B_{nm}h_n(kr),$$
где A_{nm}, B_{nm} — числа, не зависящие от координат, и подставив эти выражения в ряд (90), получим
$$u=\sum_{\alpha=0}^{\infty} h_\alpha(kr)\sum_{\beta=0}^{\alpha} P_{\alpha\beta}(\cos\theta)\,[A_{\alpha\beta}\cos\beta\varphi+B_{\alpha\beta}\sin\beta\varphi]. \tag{94}$$
Тем самым доказана возможность разложения решения уравнения Гельмгольца в ряд по частным решениям вида (56).

Умножим ряд (94) на комплексно-сопряженный ему ряд и, приняв во внимание соотношения ортогональности сферических функций (гл. XXI, § 3), вычислим интеграл от этого произведения по поверхности $\mathcal{F}\sigma$ некоторого шара σ. В результате получим:
$$\iint\limits_{\mathcal{F}\sigma}|u|^2\,dS=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2\alpha+1}r^2|h_\alpha(kr)|^2\times$$
$$\times\left\{|A_{\alpha0}|^2+\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{\alpha}\frac{(\alpha+\beta)!}{(\alpha-\beta)!}(|A_{\alpha\beta}|^2+|B_{\alpha\beta}|^2)\right\}. \tag{95}$$
Из этого соотношения следует утверждение, известное как *основная лемма* теории уравнения Гельмгольца: регулярное в бесконечной области решение уравнения Гельмгольца с вещественным значением параметра k, удовлетворяющее на бесконечности условию излучения и условию
$$\lim_{r\to\infty}\iint\limits_{\mathcal{F}\sigma}|u|^2\,dS=0, \tag{96}$$
где σ — шар радиуса r, тождественно равно нулю. Действительно, при вещественном k выражение
$$r^2|h_n(kr)|^2=\frac{\pi}{2k}r\left|H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)\right|^2>0$$
и не стремится к нулю при $r\to\infty$. Поэтому соотношение (95) и условие (96) совместно могут выполняться только тогда, когда
$$A_{\alpha\beta}=B_{\alpha\beta}=0, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant\infty, \quad 0\leqslant\beta\leqslant\alpha.$$

Но так как все коэффициенты ряда (94) равны нулю, то и $u=0$. Таким образом, лемма доказана.

§ 8*. Вопросы единственности решений внешних граничных задач для уравнения Гельмгольца

Выше мы уже касались проблемы единственности решения внутренних граничных задач для уравнения Гельмгольца и сформулировали альтернативу (§ 2), согласно которой решения внут-