Положив
$$a_{nm}(r)=A_{nm}h_n(kr), \quad b_{nm}(r)=B_{nm}h_n(kr),$$
где A_{nm}, B_{nm} — числа, не зависящие от координат, и подставив эти выражения в ряд (90), получим
$$u=\sum_{\alpha=0}^{\infty} h_\alpha(kr)\sum_{\beta=0}^{\alpha} P_{\alpha\beta}(\cos\theta)\left[A_{\alpha\beta}\cos\beta\varphi+B_{\alpha\beta}\sin\beta\varphi\right]. \tag{94}$$
Тем самым доказана возможность разложения решения уравнения Гельмгольца в ряд по частным решениям вида (56).

Умножим ряд (94) на комплексно-сопряженный ему ряд и, приняв во внимание соотношения ортогональности сферических функций (гл. XXI, § 3), вычислим интеграл от этого произведения по поверхности $\mathcal{F}\sigma$ некоторого шара σ. В результате получим:
$$\iint_{\mathcal{F}\sigma}|u|^2\,dS=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2\alpha+1}r^2|h_\alpha(kr)|^2\times$$
$$\times\left\{|A_{\alpha 0}|^2+\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{\alpha}\frac{(\alpha+\beta)!}{(\alpha-\beta)!}\left(|A_{\alpha\beta}|^2+|B_{\alpha\beta}|^2\right)\right\}. \tag{95}$$
Из этого соотношения следует утверждение, известное как *основная лемма* теории уравнения Гельмгольца: регулярное в бесконечной области решение уравнения Гельмгольца с вещественным значением параметра k, удовлетворяющее на бесконечности условию излучения и условию
$$\lim_{r\to\infty}\iint_{\mathcal{F}\sigma}|u|^2\,dS=0, \tag{96}$$
где σ — шар радиуса r, тождественно равно нулю. Действительно, при вещественном k выражение
$$r^2|h_n(kr)|^2=\frac{\pi}{2k}r\left|H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)\right|^2>0$$
и не стремится к нулю при $r\to\infty$. Поэтому соотношение (95) и условие (96) совместно могут выполняться только тогда, когда
$$A_{\alpha\beta}=B_{\alpha\beta}=0, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant\infty, \quad 0\leqslant\beta\leqslant\alpha.$$

Но так как все коэффициенты ряда (94) равны нулю, то и $u=0$. Таким образом, лемма доказана.

§ 8*. Вопросы единственности решений внешних граничных задач для уравнения Гельмгольца

Выше мы уже касались проблемы единственности решения внутренних граничных задач для уравнения Гельмгольца и сформулировали альтернативу (§ 2), согласно которой решения внутренних задач всегда единственны с точностью до свободных колебаний.

Перейдем теперь к внешним граничным задачам. Покажем, что справедлива следующая теорема единственности: *решение внешних задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца*

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad k = k' + ik''$$

в классе регулярных функций, удовлетворяющих на бесконечности условию излучения:

$$\lim_{r\to\infty} e^{|k''|r} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} u = 0, \tag{97}$$

единственно.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что решения внешних однородных задач Дирихле и Неймана, удовлетворяющие на бесконечности условию излучения, тождественно равны нулю.

Пусть V — бесконечная область, в которой ищется решение граничной задачи, $\mathcal{F}V$ — ее граница, Σ — сферическая поверхность радиуса r, содержащая поверхность $\mathcal{F}V$ внутри себя.

Рассмотрим положительную форму

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right], \tag{98}$$

где

$$v = \operatorname{Re} e^{-ickt} u. \tag{99}$$

Заметим, что функция v удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta v = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{100}$$

Действительно, приняв во внимание, что функция u удовлетворяет уравнению Гельмгольца, получим:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \operatorname{Re}(-k^2 e^{-ickt} u) = \operatorname{Re} e^{-ickt}\Delta u = \Delta \operatorname{Re} e^{-ickt} u = \Delta v,$$

что и утверждалось.

Продифференцируем $\mathcal{E}$ по t:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha\,\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Подставив в последний член правой части выражение для $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ из уравнения (100), после несложных преобразований придем к соотношению:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}.$$

Применив теперь к $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ в области V^*, заключенной между поверхностями $\mathcal{F}V$ и Σ, формулу Остроградского — Гаусса, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{V^*}\mathcal{E}\,dV=\iint\limits_{\mathcal{F}V}T_n dS+\iint\limits_{\Sigma}T_n\,dS, \tag{101}$$

где T_n — нормальная к границам $\mathcal{F}V$ и Σ компонента вектора $\mathbf{T}$, имеющего своими компонентами по осям величины

$$T_j\equiv\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x_j}\quad (j=1,\ 2,\ 3).$$

Из выражений для T_j ясно, что

$$T_n=\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial n}.$$

Выразим теперь v через u с помощью соотношения (99). Введя обозначения

$$k=k'+ik'',\quad u=u'+iu'', \tag{102}$$

где k' и k'', u' и u'', соответственно вещественная и мнимая части k и u, запишем соотношение (99) в форме

$$v=e^{ck''t}(u'\cos ck't+u''\sin ck't), \tag{103}$$

откуда

$$\begin{gathered}T_n\equiv\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial n}=ce^{2ck''t}\left(\frac{du'}{dn}\cos ck't+\frac{du''}{dn}\sin ck't\right)\times\\ \times[(k''u'+k'u'')\cos ck't+(k''u''-k'u')\sin ck't].\end{gathered} \tag{104}$$

В силу любого из граничных условий $u=0$ или $\frac{du}{dn}=0$, когда $x\in\mathcal{F}V$, на поверхности $\mathcal{F}V$ компонента $T_n=0$, так что интеграл по $\mathcal{F}V$ в формуле (101) равен нулю.

Для оценки интеграла по Σ воспользуемся условием излучения (70) и оценкой (82):

$$\text{при}\quad r\to\infty\quad u=e^{-|k''|r}O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{105}$$

которые при обозначениях (102) представим в виде:

$$\begin{gathered}u'=e^{-|k''|r}O\left(\frac{1}{r}\right),\quad u''=e^{-|k''|r}O\left(\frac{1}{r}\right),\\ -\frac{\partial u'}{\partial r}=k''u'+k'u''+o\left(\frac{e^{-|k''|r}}{r}\right),\\ -\frac{\partial u''}{\partial r}=k''u''-k'u'+o\left(\frac{e^{-|k''|r}}{r}\right).\end{gathered}$$

Символ $o(\zeta)$ здесь означает совокупность членов более высокого порядка малости, чем ζ. Подставив эти оценки в формулу (104) и приняв во внимание, что на Σ $\frac{d}{dn}=\frac{\partial}{\partial r}$, получим

$$T_n = -ce^{2ck''t}\left\{[(k''u'+k'u'')\cos ck't + \right.$$

$$\left. +(k''u''-k'u')\sin ck't]^2 + o\left(\frac{e^{-2|k''|r}}{r^2}\right)\right\},$$

откуда ясно, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \mathscr{E}\,dV =$$

$$= -ce^{2ck''t}\lim_{r\to\infty}\iint\limits_\Sigma [(k''u'+k'u'')\cos ck't + (k''u''-k'u')\sin ck't]^2\,dS. \tag{106}$$

Если $k''\neq 0$, то подынтегральное выражение интеграла по Σ представляет бесконечно малую величину по сравнению с $\frac{1}{r^2}$. Поэтому этот интеграл при $r\to\infty$ стремится к нулю, вследствие чего

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \mathscr{E}\,dV = 0,\qquad \iiint\limits_V \mathscr{E}\,dV = \text{const}. \tag{107}$$

Подставив сюда выражение (98) для $\mathscr{E}$, приняв во внимание формулу (103) и положив один раз $t=0$, а другой раз $t=t$, придем к выводу, что в силу соотношений (107) при всех t должно соблюдаться равенство

$$\iiint\limits_V\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial u'}{\partial x_\alpha}\right)^2 + c^2(k''u'+k'u'')^2\right]dV =$$

$$= e^{2ck''t}\cos ck't\iiint\limits_V\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial u'}{\partial x_\alpha}\right)^2 + c^2(k''u'+k'u'')^2\right]dV +$$

$$+ e^{2ck''t}\sin ck't\iiint\limits_V\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial u''}{\partial x_\alpha}\right)^2 + c^2(k''u''-k'u')^2\right]dV +$$

$$+ 2e^{2ck''t}\cos ck't\sin ck't\iiint\limits_V\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial u'}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u''}{\partial x_\alpha} + \right.$$

$$\left. + c^2(k''u'+k'u'')(k''u''-k'u')\right]dV.$$

Но это возможно только в том случае, если все входящие сюда интегралы равны нулю. Так как подынтегральные выражения интегралов, являющихся коэффициентами при $\cos ck''t$ и $\sin ck't$, неотрицательны, то в области V $k''u'+k'u''=0$, $k''u''-k'u'=0$, откуда следует, что в этой области $u'=u''=0$ и $u\equiv 0$. Таким образом, для $k''\neq 0$ теорема доказана.

Если же $k''=0$, то из соотношений (98) и (102) следует, что $\iiint\limits_V \mathscr{E}\,dV$ — периодическая функция времени и, значит, ее производная по t неограниченное число раз меняет знак. Но правая часть соотношения (106) имеет определенный знак. Поэтому соблюдение соотношения (106) возможно только в том случае, если обе его части равны нулю, откуда

$$\lim_{r\to\infty}\iint\limits_{\Sigma}(u''\cos ck't+u'\sin ck't)^2\,dS=0.$$

При произвольном t это возможно только в том случае, если

$$\lim_{r\to\infty}\iint\limits_{\Sigma}u'^2\,dS=\lim_{r\to\infty}\iint\limits_{\Sigma}u''^2\,dS=0,$$

откуда следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\iint\limits_{\Sigma}|u|^2\,dS=0.$$

Отсюда, в силу основной леммы теории уравнения Гельмгольца (§ 7), следует, что в области V $u=0$. Тем самым теорема доказана полностью.

Легко видеть, что доказательство теоремы может быть проведено до конца и в том случае, если при $k''\neq 0$ условие излучения брать не в форме (70), а в форме:

$$\lim_{r\to\infty}u=0,\quad k''>0,$$

так как обращение интеграла $\iint\limits_{\Sigma}T_n\,dS$ в нуль при $r\to\infty$ обеспечивается экспоненциальным убыванием функций u' и u'', имеющим место в силу оценки (82).

Для читателя представит интерес попытаться распространить проведенное доказательство на смешанную внешнюю задачу.

ЗАДАЧА

Показать, что рассуждения, которые при $k''\neq 0$ после установления соотношения (93) приводят к доказательству теоремы единственности, при $k''=0$ не ведут к цели.

Глава XXV

ИЗЛУЧЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЗВУКА

§ 1. Основные зависимости для звуковых полей

В этой главе рассмотрим ряд простых задач, относящихся к изучению звуковых волн, т. е. волн, представляющих *малые* колебания некоторой упругой среды. В связи с этим напомним