Если же $k''=0$, то из соотношений (98) и (102) следует, что $\iiint\limits_V \mathscr{E}\,dV$ — периодическая функция времени и, значит, ее производная по t неограниченное число раз меняет знак. Но правая часть соотношения (106) имеет определенный знак. Поэтому соблюдение соотношения (106) возможно только в том случае, если обе его части равны нулю, откуда

$$\lim_{r\to\infty}\iint\limits_{\Sigma}(u''\cos ck't+u'\sin ck't)^2\,dS=0.$$

При произвольном t это возможно только в том случае, если

$$\lim_{r\to\infty}\iint\limits_{\Sigma}u'^2\,dS=\lim_{r\to\infty}\iint\limits_{\Sigma}u''^2\,dS=0,$$

откуда следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\iint\limits_{\Sigma}|u|^2\,dS=0.$$

Отсюда, в силу основной леммы теории уравнения Гельмгольца (§ 7), следует, что в области V $u=0$. Тем самым теорема доказана полностью.

Легко видеть, что доказательство теоремы может быть проведено до конца и в том случае, если при $k''\neq 0$ условие излучения брать не в форме (70), а в форме:

$$\lim_{r\to\infty}u=0,\quad k''>0,$$

так как обращение интеграла $\iint\limits_{\Sigma}T_n\,dS$ в нуль при $r\to\infty$ обеспечивается экспоненциальным убыванием функций u' и u'', имеющим место в силу оценки (82).

Для читателя представит интерес попытаться распространить проведенное доказательство на смешанную внешнюю задачу.

ЗАДАЧА

Показать, что рассуждения, которые при $k''\neq 0$ после установления соотношения (93) приводят к доказательству теоремы единственности, при $k''=0$ не ведут к цели.

Глава XXV

ИЗЛУЧЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЗВУКА

§ 1. Основные зависимости для звуковых полей

В этой главе рассмотрим ряд простых задач, относящихся к изучению звуковых волн, т. е. волн, представляющих *малые* колебания некоторой упругой среды. В связи с этим напомним основные соотношения, относящиеся к звуковым волнам (гл. I, § 3), и преобразуем их к более удобному для наших целей виду.

Потенциал скоростей частиц невязкой среды, являющейся носителем звуковых колебаний, подчиняется волновому уравнению (35) гл. I, которое в случае стационарных звуковых колебаний, происходящих с круговой частотой ω, может быть заменено уравнением Гельмгольца относительной амплитуды u колебаний потенциала:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{1}$$

где $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$, a — скорость звука.

В дальнейшем для амплитуд колебаний будем сохранять те же обозначения, которые принимаются и для самих величин, причем слово амплитуда будем опускать, говоря просто *потенциал*, *скорость* и т. д. вместо амплитуда потенциала, амплитуда скорости и т. д. Это представит большое удобство, позволяя избежать введения новых символов и упростить терминологию, а при осмотрительном отношении не может повести к недоразумениям. Переход от общих уравнений для колебаний к уравнениям для станционарных колебаний при этом также будет весьма простым. При введении зависимости от времени множителем $e^{-i\omega t}$ он сводится к замене

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega. \tag{2}$$

Сохранение обозначений оправдано также тем, что в стационарном случае поле амплитуд дает полное решение всей задачи, определяя, в частности, и поля самих колебающихся величин.

По определению потенциала скоростей, проекция скорости движения среды на направление l

$$v_l = \frac{\partial u}{\partial l}. \tag{3}$$

Скорость среды связана с давлением в среде p соотношениями (12) гл. VIII, которые, в силу (2), могут быть записаны в виде

$$v_l = -\frac{i}{\rho\omega}\frac{\partial p}{\partial l}, \tag{4}$$

где ρ — плотность среды. Из соотношений (3) и (4) теперь следует, что

$$\frac{\partial p}{\partial l} = i\rho\omega\frac{\partial u}{\partial l} = i\rho\omega v_l. \tag{5}$$

Так как звуковые колебания представляют малые колебания, без существенной погрешности в определении p в последнем соотношении величину ρ можно считать равной плотности ρ_0 невозмущенной среды и в этом предположении проинтегрировать его по l, что даст

$$p = i\rho_0 \omega u + \text{const}.$$

Отсюда, в силу (1), следует, что

$$\Delta p + k^2 p = 0, \tag{6}$$

т. е. давление (амплитуда колебаний давления), удовлетворяет уравнению Гельмгольца.

В теории звука вводят понятие *интенсивности звука* I, определяемой соотношением

$$I = \frac{|p|^2}{2\rho a}. \tag{7}$$

Интенсивность звука равна потоку энергии, переносимой волной через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

§ 2. Звуковое поле вибрирующего цилиндра

Предположим, что цилиндр радиуса r_0 совершает малые гармонические колебания (вибрации) с амплитудой b в направлении, перпендикулярном его оси. Найдем возникающее при этом стационарное звуковое поле.

Как было показано в § 1, поле давления звуковой волны удовлетворяет уравнению Гельмгольца (6), так что математическая постановка рассматриваемой задачи заключается сейчас в установлении граничных условий. Введем цилиндрические координаты (r, φ, z) с осью z, направленной по оси цилиндра в тот момент, когда последний проходит положение равновесия. Плоскость отсчета углов φ совместим с плоскостью колебаний цилиндра. Если колебания цилиндра происходят со скоростью, не превосходящей скорости звука в среде, что мы будем предполагать, между средой и цилиндром не образуется пустот. Поэтому скорость движения среды в направлении, перпендикулярном к поверхности цилиндра, совпадает с радиальной скоростью движения этой последней:

$$v_r = \omega b \cos \varphi.$$

Отсюда, приняв во внимание формулу (5), заключим, что граничное условие рассматриваемой задачи будет следующим:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_0} = i\rho_0 \omega^2 b \sin \varphi. \tag{8}$$

Кроме того, на бесконечности должно выполняться условие излучения (62) гл. XXIV:

$$\lim_{r\to\infty} p = 0, \quad \lim_{r\leftarrow\infty} r\left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp\right) = 0. \tag{9}$$