его по l, что даст

$$p = i\rho_0 \omega u + \text{const}.$$

Отсюда, в силу (1), следует, что

$$\Delta p + k^2 p = 0, \tag{6}$$

т. е. давление (амплитуда колебаний давления), удовлетворяет уравнению Гельмгольца.

В теории звука вводят понятие *интенсивности звука* I, определяемой соотношением

$$I = \frac{|p|^2}{2\rho a}. \tag{7}$$

Интенсивность звука равна потоку энергии, переносимой волной через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

§ 2. Звуковое поле вибрирующего цилиндра

Предположим, что цилиндр радиуса r_0 совершает малые гармонические колебания (вибрации) с амплитудой b в направлении, перпендикулярном его оси. Найдем возникающее при этом стационарное звуковое поле.

Как было показано в § 1, поле давления звуковой волны удовлетворяет уравнению Гельмгольца (6), так что математическая постановка рассматриваемой задачи заключается сейчас в установлении граничных условий. Введем цилиндрические координаты (r, φ, z) с осью z, направленной по оси цилиндра в тот момент, когда последний проходит положение равновесия. Плоскость отсчета углов φ совместим с плоскостью колебаний цилиндра. Если колебания цилиндра происходят со скоростью, не превосходящей скорости звука в среде, что мы будем предполагать, между средой и цилиндром не образуется пустот. Поэтому скорость движения среды в направлении, перпендикулярном к поверхности цилиндра, совпадает с радиальной скоростью движения этой последней:

$$v_r = \omega b \cos \varphi.$$

Отсюда, приняв во внимание формулу (5), заключим, что граничное условие рассматриваемой задачи будет следующим:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_0} = i\rho_0 \omega^2 b \sin \varphi. \tag{8}$$

Кроме того, на бесконечности должно выполняться условие излучения (62) гл. XXIV:

$$\lim_{r \to \infty} p = 0, \quad \lim_{r \leftarrow \infty} r\left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp\right) = 0. \tag{9}$$

Для отыскания решения p воспользуемся непосредственно результатами § 4 гл. XXIV, где мы нашли, что частные решения уравнения Гельмгольца могут быть представлены формулой (50):

$$u = AZ_n(\mu r)\cos(n\varphi + \psi_n)\cos(\nu z + \psi_\nu) \quad (\nu \equiv \sqrt{k^2 - \mu^2}).$$

Одно из них и будет решением нашей задачи.

В рассматриваемом случае зависимость от z отсутствует; поэтому $\nu = 0$, $\mu = k$. Далее, в силу граничного условия (8), зависимость от φ должна выражаться только с помощью множителя $\cos\varphi$, что возможно лишь при $n = 1$, $\psi_n = 0$. Наконец, чтобы при $r \to \infty$ удовлетворялось условие излучения, в качестве решения $Z_1(kr)$ уравнения Бесселя следует выбрать функцию Ханкеля первого рода $H_1^{(1)}(kr)$. Таким образом, действительно, выбор решения из числа решений вида (50) гл. XXIV оказывается однозначным и мы получим

$$p = AH_1^{(1)}(kz)\cos\varphi, \tag{10}$$

где A — постоянная, определяемая из граничного условия (8), которое даст

$$A\left(\frac{dH_1^{(1)}}{dr}\right)_{r=r_0}\cos\varphi = i\rho_0\omega^2 b\cos\varphi,$$

откуда

$$A = \frac{i\rho_0\omega^2 b}{\left(\frac{dH_1^{(1)}}{dr}\right)_{r=r_0}}. \tag{11}$$

Если

$$kr_0 = \frac{2\pi r_0}{\lambda} \ll 1, \tag{12}$$

где λ — длина волны с круговой частотой ω, т. е. длина звуковых волн намного больше периметра сечения цилиндра (проволока), то для вычисления A можно воспользоваться соотношениями (18) и (61) гл. XIII, в силу которых при $n = 1$ и малых $x = kr = \frac{\omega r}{a}$ получим

$$H_1^{(1)}(kr) \approx -\frac{2i}{\pi kr} = -\frac{2ia}{\pi\omega r},$$

где a — скорость звука в среде. Отсюда

$$\left(\frac{dH_1^{(1)}}{dr}\right)_{r=r_0} \approx \frac{2ia}{\pi\omega r_0^2}$$

и

$$A \approx \frac{\pi\omega^3 r_0^2 b\rho_0}{2a}. \tag{13}$$

Исследуем полученное решение на больших расстояниях от цилиндра, т. е. при

$$kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1.$$

Воспользовавшись асимптотическим представлением (64) гл. XIII, получим

$$H_1^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i\left(kr - \frac{3}{4}\pi\right)}.$$

В силу (10):

$$p = A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{i\left(kr - \frac{3}{4}\pi\right)}}{\sqrt{kr}} \cos\varphi. \tag{14}$$

Применив формулу (4) и заметив, что $k = \frac{\omega}{a}$, найдем составляющие вектора скорости среды на больших расстояниях от цилиндра — радиальную:

$$v_r = \frac{A}{\rho_0\omega}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{i\left(kr - \frac{3}{4}\pi\right)}}{\sqrt{kr}} \left(1 - \frac{1}{2i}\frac{1}{kr}\right)\cos\varphi$$

и тангенциальную:

$$v_\varphi = -i\,\frac{A}{\rho_0\omega}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{i\left(kr - \frac{3}{4}\pi\right)}}{k^{1/2}\, r^{3/2}} \sin\varphi.$$

Отбросив члены высшего порядка малости, получим

$$\begin{gathered} v_r \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{A}{\rho_0\omega}\, \frac{e^{i\left(kr - \frac{3}{4}\pi\right)}}{\sqrt{kr}}\cos\varphi, \\ v_\varphi \approx 0, \end{gathered} \tag{15}$$

т. е. на больших расстояниях от цилиндра движение среды, в основном, радиальное, тангенциальные же составляющие скорости убывают на порядок быстрее (как $r^{-3/2}$), чем радиальные.

Определим, наконец, интенсивность I звукового поля — величину, представляющую наибольший практический интерес. В силу формул (7), (14) и (15) получим

$$I = \frac{A^2}{\pi\omega\rho_0 r}\cos^2\varphi \tag{16}$$

или, для струны:

$$I = \frac{\pi\rho_0 b^2 r_0^4 \omega^5}{4a^2 r}\cos^2\varphi. \tag{17}$$

Таким образом, поток энергии в звуковом поле колеблющегося цилиндра убывает пропорционально *первой степени* расстояния.

Он весьма быстро падает с уменьшением поперечника цилиндра и частоты. В последнем обстоятельстве кроется одна из причин, по которым басовые струны музыкальных инструментов должны быть толстыми. В плоскости, перпендикулярной плоскости колебаний цилиндра, звуковое поле отсутствует (точнее оно обусловливается только быстро убывающей тангенциальной компонентой).

ЗАДАЧИ

1. Вычислить звуковое поле пульсирующего бесконечного цилиндра (т. е. цилиндра, радиус которого периодически изменяется).

2. Определить энергию, излучаемую с единицы площади вибрирующего и пульсирующего цилиндров.

Указание. Проинтегрировать выражение для I и отнести результат к единице площади.

§ 3. Звуковое поле пульсирующего шара. Точечный источник

Рассмотрим гармонически пульсирующий шар, т. е. шар, радиус которого гармонически колеблется. Пусть r_0 — средний радиус шара, b — амплитуда колебаний, а ω — их круговая частота.

Поле давления вне шара, как мы знаем (§ 1), должно удовлетворять уравнению Гельмгольца (1). Если колебания шара происходят с дозвуковой скоростью, то граничное условие состоит в равенстве радиальных скоростей поверхности шара и примыкающей к ней среды (подробнее см. § 2). Введя сферические координаты (r, θ, φ) с началом в центре шара, в силу формулы (5) это граничное условие можно записать в форме

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_0} = i\rho\omega^2 b. \tag{18}$$

Кроме того, чтобы исключить из рассмотрения волны, сходящиеся из бесконечности к шару, потребуем, чтобы выполнялось условие излучения (62) гл. XXIV:

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp\right) = 0. \tag{19}$$

Решение поставленной задачи непосредственно заключено в одном из частных решений уравнения Гельмгольца в сферических координатах (56) гл. XXIV:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)\, P_{nm}(\cos\theta)\cos(m\varphi + \psi_m).$$

Чтобы при $r = r_0$ решение не зависело ни от θ ни от φ, очевидно, должно быть $m = 0$, $n = 0$. Далее, чтобы удовлетворить условию излучения, в качестве цилиндрической функции следует выбрать