Он весьма быстро падает с уменьшением поперечника цилиндра и частоты. В последнем обстоятельстве кроется одна из причин, по которым басовые струны музыкальных инструментов должны быть толстыми. В плоскости, перпендикулярной плоскости колебаний цилиндра, звуковое поле отсутствует (точнее оно обусловливается только быстро убывающей тангенциальной компонентой).

ЗАДАЧИ

1. Вычислить звуковое поле пульсирующего бесконечного цилиндра (т. е. цилиндра, радиус которого периодически изменяется).

2. Определить энергию, излучаемую с единицы площади вибрирующего и пульсирующего цилиндров.

Указание. Проинтегрировать выражение для I и отнести результат к единице площади.

§ 3. Звуковое поле пульсирующего шара. Точечный источник

Рассмотрим гармонически пульсирующий шар, т. е. шар, радиус которого гармонически колеблется. Пусть r_0 — средний радиус шара, b — амплитуда колебаний, а ω — их круговая частота.

Поле давления вне шара, как мы знаем (§ 1), должно удовлетворять уравнению Гельмгольца (1). Если колебания шара происходят с дозвуковой скоростью, то граничное условие состоит в равенстве радиальных скоростей поверхности шара и примыкающей к ней среды (подробнее см. § 2). Введя сферические координаты (r, θ, φ) с началом в центре шара, в силу формулы (5) это граничное условие можно записать в форме

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_0} = i\rho\omega^2 b. \tag{18}$$

Кроме того, чтобы исключить из рассмотрения волны, сходящиеся из бесконечности к шару, потребуем, чтобы выполнялось условие излучения (62) гл. XXIV:

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp\right) = 0. \tag{19}$$

Решение поставленной задачи непосредственно заключено в одном из частных решений уравнения Гельмгольца в сферических координатах (56) гл. XXIV:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)\, P_{nm}(\cos\theta)\cos(m\varphi + \psi_m).$$

Чтобы при $r = r_0$ решение не зависело ни от θ ни от φ, очевидно, должно быть $m = 0$, $n = 0$. Далее, чтобы удовлетворить условию излучения, в качестве цилиндрической функции следует выбрать функцию Ханкеля первого рода. Это из всей совокупности рассматриваемых решений выделит решение

$$p = \frac{A}{\sqrt{r}} H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(kr), \tag{20}$$

где A — постоянная. Это решение единственно в силу теоремы единственности для уравнения Гельмгольца (гл. XXIV, § 8). Приняв во внимание, что (гл. XIII, § 6) $H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(x) = -i\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^{ix}$, запишем полученное решение в форме

$$p = -iA\sqrt{2\pi k}\,\frac{e^{ikr}}{kr}. \tag{21}$$

Дифференцируя это выражение, подставляя $r = r_0$ и сравнивая результат с выражением (18), найдем, что

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\omega^2 r_0^2 b\rho\sqrt{k}}{1 - ikr_0}\, e^{-ikr_0},$$

следовательно,

$$p = -i\,\frac{\omega^2 r_0^2 b\rho}{(1 - ikr_0)\,r}\, e^{ik(r - r_0)}. \tag{22}$$

Величина $4\pi r_0^2 b$ представляет амплитуду пульсаций объема шара. Поэтому величина

$$Q_0 = 4\pi r_0^2 b\omega \tag{23}$$

представляет амплитуду объемной скорости пульсации. Ее называют *производительностью* шарового источника звука. Подставив Q_0 в формулу (22), получим

$$p = \frac{1}{4\pi i}\,\frac{\omega\rho Q_0}{1 - ikr_0}\,\frac{e^{ik(r - r_0)}}{r}. \tag{24}$$

Наконец, предположим, что радиус шара пренебрежимо мал по сравнению с длиной λ излучаемой волны, т. е. что

$$kr_0 = 2\pi\frac{r_0}{\lambda} \ll 1.$$

В этом особенно важном случае пульсирующий шар по свойствам приближается к идеализированному излучателю — *точечному источнику*, поле давления которого, как ясно из формулы (24), определяется соотношением

$$p = \frac{\omega\rho Q_0}{4\pi i}\,\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{Q_0}{4\pi}\,\frac{\omega^2\rho}{a}\,\frac{e^{ikr}}{ikr}. \tag{25}$$

В силу формулы (4), скорость движения среды на больших расстояниях от точечного источника

$$v = v_r = -\frac{i}{\rho\omega}\,\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\omega^2 Q_0}{a^2}\,\frac{e^{irk}}{ikr}.$$

Наконец, интенсивность звукового поля точечного источника

$$I=\frac{\omega^2\rho}{32\pi^2 a}\frac{Q_0^2}{r^2}. \tag{26}$$

Таким образом, поток энергии в поле точечного источника (и в поле малого пульсирующего шара) падает на большом удалении от источника пропорционально квадрату расстояния.

Важность понятия точечного источника состоит в том, что объемный источник звука может быть заменен эквивалентной системой распределенных точечных источников с производительностью $q(x)\,dV$, после чего поле давления может быть найдено с помощью формулы, очевидным образом следующей из формулы (25):

$$p(x)=\frac{\omega\rho}{4\pi i}\iiint\limits_V q\,\frac{e^{ikr}}{r}\,dV, \tag{27}$$

где V — объем, занятый источником, r — расстояние от точки x, в которой определяется поле, до точки ξ, принадлежащей элементу объема dV. Эта формула дает представление поля давления с помощью объемного колебательного потенциала. Сдвиг фазы колебаний точечных источников легко может быть учтен введением комплексных значений для q.

ЗАДАЧА

Вычислить энергию, излучаемую точечным источником.

§ 4. Излучение из отверстия в плоском экране

Покажем на простом примере, как можно приближенно рассчитать звуковое поле, заменяя излучатель системой распределенных точечных источников.

Предположим, что в безграничной плоской стене имеется круглое отверстие, через которое падающая на заднюю сторону стены плоская звуковая волна проникает в пространство, лежащее по другую сторону стены. Оставляя в стороне вопрос об интенсивности излучаемого из отверстия звукового поля, поставим задачу найти, как оно распределяется в пространстве перед стеной на достаточном удалении от нее.

Каждый элемент dS площади отверстия будем считать точечным источником звука с производительностью $4\pi q\,dS$, где q — постоянная величина (равномерное распределение интенсивности излучения по отверстию). Введем сферические координаты (r, θ, φ) с началом в центре отверстия и полярной осью, перпендикулярной его плоскости. В силу формулы (25), давление, создаваемое источником dS в точке $x(r, \theta, \varphi)$, равно

$$dp=\frac{q\omega^2\rho}{a}\frac{e^{ikR}}{ikR}\,dS, \tag{28}$$