Наконец, интенсивность звукового поля точечного источника

$$I = \frac{\omega^2 \rho}{32\pi^2 a} \frac{Q_0^2}{r^2}. \tag{26}$$

Таким образом, поток энергии в поле точечного источника (и в поле малого пульсирующего шара) падает на большом удалении от источника пропорционально квадрату расстояния.

Важность понятия точечного источника состоит в том, что объемный источник звука может быть заменен эквивалентной системой распределенных точечных источников с производительностью $q(x)\,dV$, после чего поле давления может быть найдено с помощью формулы, очевидным образом следующей из формулы (25):

$$p(x) = \frac{\omega\rho}{4\pi i} \iiint\limits_V q \frac{e^{ikr}}{r} dV, \tag{27}$$

где V — объем, занятый источником, r — расстояние от точки x, в которой определяется поле, до точки ξ, принадлежащей элементу объема dV. Эта формула дает представление поля давления с помощью объемного колебательного потенциала. Сдвиг фазы колебаний точечных источников легко может быть учтен введением комплексных значений для q.

ЗАДАЧА

Вычислить энергию, излучаемую точечным источником.

§ 4. Излучение из отверстия в плоском экране

Покажем на простом примере, как можно приближенно рассчитать звуковое поле, заменяя излучатель системой распределенных точечных источников.

Предположим, что в безграничной плоской стене имеется круглое отверстие, через которое падающая на заднюю сторону стены плоская звуковая волна проникает в пространство, лежащее по другую сторону стены. Оставляя в стороне вопрос об интенсивности излучаемого из отверстия звукового поля, поставим задачу найти, как оно распределяется в пространстве перед стеной на достаточном удалении от нее.

Каждый элемент dS площади отверстия будем считать точечным источником звука с производительностью $4\pi q\,dS$, где q — постоянная величина (равномерное распределение интенсивности излучения по отверстию). Введем сферические координаты (r, θ, φ) с началом в центре отверстия и полярной осью, перпендикулярной его плоскости. В силу формулы (25), давление, создаваемое источником dS в точке $x(r, \theta, \varphi)$, равно

$$dp = \frac{q\omega^2\rho}{a} \frac{e^{ikR}}{ikR} dS, \tag{28}$$

где R — расстояние от точки $\xi\left(r', \frac{\pi}{2}, \varphi'\right)$, принадлежащей dS, до точки наблюдения $x(r, \theta, \varphi)$. Пользуясь известной формулой аналитической геометрии найдем, что

$$R^2=(r\sin\theta\cos\varphi-r'\cos\varphi')^2+(r\sin\theta\sin\varphi-r'\sin\varphi')^2+r^2\cos^2\theta.$$

Считая, что мы рассматриваем поле на большом удалении от стены ($r\gg r'$), пренебрежем членами, содержащими r'^2. Это после простых преобразований даст

$$R^2\approx r^2-2rr'\sin\theta\cos\psi\quad(\psi=\varphi-\varphi'),$$

откуда

$$R\approx r-r'\sin\theta\cos\psi. \tag{29}$$

Не делая существенной ошибки в знаменателе выражения (28), можно принять $R\approx r$, в показателе же степени, как будет ясно из дальнейшего, следует сохранить более точное выражение (29). Это даст

$$dp\approx\frac{q\omega^2\rho}{a}e^{ikr}\frac{e^{ikr'\sin\theta\cos\psi}}{ikr}dS.$$

Заметив, что $dS=r'\,dr'\,d\psi$, для определения давления от всей совокупности точечных источников на S получим выражение

$$p=\frac{q\omega^2\rho}{a}\frac{e^{ikr}}{ikr}\int\limits_0^{r_0'}r'\,dr'\int\limits_0^{2\pi}e^{-ikr'\sin\theta\cos\psi}\,d\psi,$$

где r_0' — радиус отверстия. Согласно (58) гл. XIII внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi}e^{-ikr'\sin\theta\cos\psi}\,d\psi=2\pi J_0(kr'\sin\theta).$$

Поэтому

$$p=\frac{2\pi q\omega^2\rho}{a}\frac{e^{ikr}}{ikr}\int\limits_0^{r_0'}J_0(kr'\sin\theta)\,r'\,dr'=\frac{2\pi q\omega^2\rho r_0'^2}{a}\,\frac{J_1(kr_0'\sin\theta)}{kr_0'\sin\theta}\,\frac{e^{ikr}}{ikr}.$$

Подставив это выражение в (7), найдем, что интенсивность звукового поля на большом удалении от отверстия

$$I=\frac{4\pi^4q^2a\rho r_0'^2}{r^2\lambda^2}\left[\frac{2J_1\left(2\pi\frac{r_0'}{\lambda}\sin\theta\right)}{2\pi\frac{r_0'}{\lambda}\sin\theta}\right]^2,$$

где вместо круговой частоты ω подставлена длина волны λ излучаемого звука.

Функция $\frac{2J_1(x)}{x}$ близка к 1 при $x \leqslant 1{,}5$, затем ее изменение носит осциллирующий характер с быстро спадающей амплитудой. Поэтому, если $2\pi \frac{r_0'}{\lambda} \leqslant 1{,}5$, т. е., примерно, $r_0' < \frac{\lambda}{4}$, то излучение от отверстия в пространстве за стеной практически будет распространяться равномерно (случай длинных волн). По мере уменьшения длины волны излучение будет приобретать все более остро направленный характер, причем при изменении θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ возможно появление нескольких максимумов и минимумов интенсивности (боковые лепестки).

§ 5. Звуковое поле при произвольном колебании поверхности шара

В этом параграфе перейдем к более сложной задаче определения поля шара, поверхность которого совершает гармонические колебания определенной частоты с произвольно меняющейся от точки к точке амплитудой и фазой. Эта задача обладает бо́льшей общностью, чем представляется на первый взгляд. Действительно, если описать вокруг произвольного источника звука шаровую поверхность таким радиусом, чтобы источник был внутри нее, то поле на этой поверхности однозначно определит поле в пространстве вне ее в силу единственности решения граничных задач для уравнения Гельмгольца. Поэтому, рассматривая шар с *произвольно* колеблющейся поверхностью, мы получим ряд результатов, относящихся к полю на большом расстоянии от источника, справедливых и для произвольного источника звука.

Напомним предварительно, как может быть учтено изменение фазы колебаний при переходе от одной точки шара к другой. При сдвиге фаз колебания описываются не выражением $a(\theta, \varphi)e^{-i\omega t}$, где $a(\theta, \varphi)$ — амплитуда колебаний, а выражением $a(\theta, \varphi)e^{-i[\omega t + q(\theta, \varphi)]}$, где $q(\theta, \varphi)$ — сдвиг фазы. Положим

$$a(\theta, \varphi)e^{-iq(\theta, \varphi)} \equiv b(\theta, \varphi). \tag{30}$$

Тогда, как и в гл. XXIII, формально мы снова вернемся к выражению $b(\theta, \varphi)e^{-i\omega t}$ того же вида, что и при отсутствии сдвига фазы, но число $b(\theta, \varphi)$ будет *комплексным*. Введением *комплексной амплитуды* $b(\theta, \varphi)$, определяемой соотношением (30), мы и будем учитывать существование сдвига фазы.

Как и в § 2 и 3, будем рассматривать поле избыточного давления p, которое, как мы знаем (§ 1), удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}\right), \tag{31}$$