Функция $\frac{2J_1(x)}{x}$ близка к 1 при $x \leqslant 1{,}5$, затем ее изменение носит осциллирующий характер с быстро спадающей амплитудой. Поэтому, если $2\pi \frac{r_0'}{\lambda} \leqslant 1{,}5$, т. е., примерно, $r_0' < \frac{\lambda}{4}$, то излучение от отверстия в пространстве за стеной практически будет распространяться равномерно (случай длинных волн). По мере уменьшения длины волны излучение будет приобретать все более остро направленный характер, причем при изменении θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ возможно появление нескольких максимумов и минимумов интенсивности (боковые лепестки).

§ 5. Звуковое поле при произвольном колебании поверхности шара

В этом параграфе перейдем к более сложной задаче определения поля шара, поверхность которого совершает гармонические колебания определенной частоты с произвольно меняющейся от точки к точке амплитудой и фазой. Эта задача обладает бóльшей общностью, чем представляется на первый взгляд. Действительно, если описать вокруг произвольного источника звука шаровую поверхность таким радиусом, чтобы источник был внутри нее, то поле на этой поверхности однозначно определит поле в пространстве вне ее в силу единственности решения граничных задач для уравнения Гельмгольца. Поэтому, рассматривая шар с *произвольно* колеблющейся поверхностью, мы получим ряд результатов, относящихся к полю на большом расстоянии от источника, справедливых и для произвольного источника звука.

Напомним предварительно, как может быть учтено изменение фазы колебаний при переходе от одной точки шара к другой. При сдвиге фаз колебания описываются не выражением $a(\theta, \varphi)e^{-i\omega t}$, где $a(\theta, \varphi)$ — амплитуда колебаний, а выражением $a(\theta, \varphi)e^{-i[\omega t + q(\theta, \varphi)]}$, где $q(\theta, \varphi)$ — сдвиг фазы. Положим

$$a(\theta, \varphi)e^{-iq(\theta, \varphi)} \equiv b(\theta, \varphi). \tag{30}$$

Тогда, как и в гл. XXIII, формально мы снова вернемся к выражению $b(\theta, \varphi)e^{-i\omega t}$ того же вида, что и при отсутствии сдвига фазы, но число $b(\theta, \varphi)$ будет *комплексным*. Введением *комплексной амплитуды* $b(\theta, \varphi)$, определяемой соотношением (30), мы и будем учитывать существование сдвига фазы.

Как и в § 2 и 3, будем рассматривать поле избыточного давления p, которое, как мы знаем (§ 1), удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}\right), \tag{31}$$

где a — скорость звука в среде, ω — круговая частота колебаний. Требование равенства радиальных скоростей поверхности шара и прилегающих к ней точек среды доставляет граничное условие. В сферических координатах r, θ, φ с началом в центре шара оно может быгь записано следующим образом:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_0} = i\rho\omega^2 b(\theta, \varphi), \tag{32}$$

где r_0 — радиус шара (равновесный). Замечая, что производная по r с точностью до знака совпадает с производной по направлению нормали к поверхности шара, видим, что мы имеем дело *с внешней задачей Неймана* для уравнения Гельмгольца. Чтобы ее решение было однозначным, потребуем выполнения условия излучения

$$\lim_{r\to\infty} p = 0, \quad \lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp\right) = 0, \tag{33}$$

чем исключатся из рассмотрения волны, идущие из бесконечности.

Решение будем искать в форме ряда (94) гл. XXIV:

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(kr) \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\cos\theta)\left[A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi\right], \tag{34}$$

где

$$h_n(x) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(x). \tag{35}$$

Отметим сразу же на основании формул (28), (62) и (64) гл. XIII два предельных соотношения:

при $x \to 0$ $h_n(x) \to -i\,\dfrac{(2n-1)!!}{x^{n+1}}$; (36)

$$[(2n-1)!! \equiv 1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)],$$

при $x \to \infty$ $\qquad h_n(x) \to (-i)^n \dfrac{e^{ix}}{ix}$, (37)

которыми мы воспользуемся ниже. Ошибка при замене $h_n(x)$ их предельными значениями при малых x имеет порядок $\frac{1}{x^n}$, при больших x — порядок $\frac{1}{\sqrt{x^2-n^2}}$. Отсюда, в частности, следует, что стремление $h_n(x)$ при $x\to\infty$ к пределу *неравномерно* относительно n. Поэтому замена $h_n(x)$ при больших значениях x $(x \gg 1)$ возможна только при условии $x \gg n$.

Продифференцируем ряд (34) почленно по r. Воспользуемся для этого формулой (§ 6 гл. XIII)

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(x)\right] = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{n}{\sqrt{x}} H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(x) - \frac{n+1}{\sqrt{x}} H^{(1)}_{n+\frac{3}{2}}(x)\right],$$

которая даст

$$\frac{d}{dr} h_n(kr) = k\left[\frac{n}{2n+1} h_{n-1}(kr) - \frac{n+1}{2n+1} h_{n+1}(kr)\right], \tag{38}$$

так что, в предположении, что после дифференцирования ряд равномерно сходится при $r = r_0$, получим

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_0} = -kA_0 h_1(kr_0) + k\sum_{n=1}^{\infty} h_n'(kr_0) \times$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\cos\theta)(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)\right], \tag{39}$$

где для краткости обозначено

$$h'(kr) = \frac{n}{2n+1} h_{n-1}(kr) - \frac{n+1}{2n+1} h_{n+1}(kr). \tag{40}$$

Если вещественная и мнимая части функции $b(\theta, \varphi)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка, то ее можно разложить в ряд по сферическим функциям:

$$b(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi), \tag{41}$$

где коэффициенты a_{nm}, b_{nm} могут быть определены по формулам (30) гл. XXI. Сравнив ряды (39) и (41) и приняв во внимание соотношение (31) и граничное условие (32), придем к выводу, что это последнее будет соблюдено, если принять

$$A_{nm} = i\rho\omega a\frac{a_{nm}}{h_n'(kr_0)}, \quad B_{nm} = i\rho\omega a\frac{b_{nm}}{h_n'(kr_0)}. \tag{42}$$

Введем обозначение

$$Y_n(\theta, \varphi) \equiv a_{n0}P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} P_{nm}(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi). \tag{43}$$

Функции $Y_n(\theta, \varphi)$ представляют те самые сферические функции, которые входят в разложение

$$b(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi). \tag{44}$$

При этом обозначении ряд (39) может быть записан в окончательной форме

$$p = i\rho\omega a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n(kr)}{h_n'(kr_0)} Y_n(\theta, \varphi). \tag{45}$$

Таким образом, формальное решение поставленной задачи найдено в виде бесконечного ряда. Возникает вопрос о сходимости этого ряда. Покажем, что при любом конечном $r > r_0$ он сходится и притом абсолютно.

Отбросим конечное число n_0 членов ряда (45), выбрав n_0 так, чтобы было

$$n_0 > \sqrt{6{,}25\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + (kr)^2}, \quad n_0 \gg kr. \tag{46}$$

Заметим, что первое из этих неравенств влечет за собой неравенство $n_0 > 16$.

Воспользуемся теперь следующим асимптотическим представлением функций Ханкеля первого рода: *

$$H_\nu^{(1)}(x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi s}}e^{-s+\nu \operatorname{arcth}\frac{s}{p}}\left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right] \quad (s \equiv \sqrt{\nu^2 - x^2}), \tag{47}$$

справедливым при выполнении следующих условий:

$$\frac{\nu}{x} \gg 1, \quad \nu \gg 1, \tag{48}$$

которые при $x = kr$ и $\nu > n_0$, очевидно, соблюдаются в силу неравенств (46). Воспользовавшись тем, что $kr \ll n_0$, будем иметь

$$\frac{s}{\nu} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{kr}{\nu}\right)^2.$$

Так как $\frac{s}{\nu}$ близко к единице, то $\xi \equiv \operatorname{arcth}\frac{s}{\nu} \gg 1$ и можно написать

$$\frac{s}{\nu} \equiv \operatorname{th}\xi = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{e^{\xi} + e^{-\xi}} = \frac{1 - e^{-2\xi}}{1 + e^{-2\xi}} \approx (1 - e^{2\xi})^2 \approx 1 - 2e^{-2\xi},$$

откуда

$$\xi = \operatorname{arcth}\frac{s}{\nu} \approx -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\left(1 - \frac{s}{\nu}\right) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}\left(\frac{kr}{\nu}\right)^2 = \ln\frac{2\nu}{kr},$$

$$-s + \nu \operatorname{arcth}\frac{s}{\nu} \approx -\nu + \frac{\nu}{2}\left(\frac{kr}{2}\right)^2 + \nu\ln\frac{2\nu}{kr} \approx \nu\left(\ln\frac{2\nu}{kr} - 1\right) \approx \ln\left(\frac{2\nu}{kr}\right)^\nu.$$

Подставив найденные приближенные выражения в формулу (47), получим

$$H_\nu^{(1)}(kr) \approx -i\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\left(\frac{2\nu}{kr}\right)^\nu, \tag{49}$$

откуда, в силу определения (35) функций $h_n(x)$, следует, что

$$h_n(kr_0) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{kr_0}}H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr_0) \approx -\frac{i\sqrt{2}}{kr_0}\left(\frac{2n}{kr_0}\right)^n. \tag{50}$$

---

* См. В. И. Смирнов [1], т. III, ч. 2, п. 152.

Положим теперь $r=r_0$. Тогда, в силу формулы (40), отбросив малые члены, получим

$$h_n'(kr_0)\approx\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{1}{kr_0}\left(\frac{2n}{kr_0}\right)^n \qquad (n>n_0). \tag{51}$$

Подставив полученные выражения в ряд (45) без первых n_0 членов, видим, что рассматриваемая задача свелась к исследованию сходимости ряда

$$R_n=\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n Y_n(\theta,\ \varphi).$$

Но этот ряд заведомо сходится и притом абсолютно, так как $r_0<r$, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\ \varphi)$$

сходится по предположению.

§ 6. Исследование поля шара при произвольном колебании его поверхности. Акустические или колебательные мультиполи

Займемся исследованием решения, полученного в предыдущем параграфе.

Из (45) следует, что точки, для которых было бы $h_n'(kr)=0$ при $r=r_0$, могут оказаться особыми. Это, однако, невозможно, поскольку функции $h_n'(x)$, как и функции Ханкеля, не имеют вещественных корней. Это легко показать для малых значений kr_0, удовлетворяющих неравенству

$$kr_0=\frac{2\pi}{\lambda}r_0\ll 1,$$

где λ — длина излучаемых системой волн. В силу формул (36) и (40) при малых kr_0

$$h_n'(kr_0)\approx i(n+1)\frac{(2n-1)!!}{(kr_0)^{n+2}} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{52}$$

Подставив эти соотношения в формулу (42), получим

$$A_{nm}=\rho\omega a(kr_0)^2\frac{(kr_0)^n}{(n+1)(2n-1)!!}a_{nm},$$

$$B_{nm}=\rho\omega a(kr_0)^2\frac{(kr_0)^n}{(n+1)(2n-1)!!}b_{nm},$$

откуда следует справедливость сделанного утверждения, так как все числа A_{nm}, B_{nm} заведомо ограничены.

Выражения (52) позволяют также получить приближенное представление ряда (45) при малых размерах источника. Подставив