Положим теперь $r = r_0$. Тогда, в силу формулы (40), отбросив малые члены, получим

$$h_n'(kr_0) \approx \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{kr_0} \left(\frac{2n}{kr_0}\right)^n \qquad (n > n_0). \tag{51}$$

Подставив полученные выражения в ряд (45) без первых n_0 членов, видим, что рассматриваемая задача свелась к исследованию сходимости ряда

$$R_n = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n Y_n(\theta, \varphi).$$

Но этот ряд заведомо сходится и притом абсолютно, так как $r_0 < r$, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi)$$

сходится по предположению.

§ 6. Исследование поля шара при произвольном колебании его поверхности. Акустические или колебательные мультиполи

Займемся исследованием решения, полученного в предыдущем параграфе.

Из (45) следует, что точки, для которых было бы $h_n'(kr) = 0$ при $r = r_0$, могут оказаться особыми. Это, однако, невозможно, поскольку функции $h_n'(x)$, как и функции Ханкеля, не имеют вещественных корней. Это легко показать для малых значений kr_0, удовлетворяющих неравенству

$$kr_0 = \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \ll 1,$$

где λ — длина излучаемых системой волн. В силу формул (36) и (40) при малых kr_0

$$h_n'(kr_0) \approx i(n+1) \frac{(2n-1)!!}{(kr_0)^{n+2}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{52}$$

Подставив эти соотношения в формулу (42), получим

$$A_{nm} = \rho\omega a (kr_0)^2 \frac{(kr_0)^n}{(n+1)(2n-1)!!} a_{nm},$$
$$B_{nm} = \rho\omega a (kr_0)^2 \frac{(kr_0)^n}{(n+1)(2n-1)!!} b_{nm},$$

откуда следует справедливость сделанного утверждения, так как все числа A_{nm}, B_{nm} заведомо ограничены.

Выражения (52) позволяют также получить приближенное представление ряда (45) при малых размерах источника. Подставив выражения (52) в ряд (45), получим ряд

$$p=\frac{\omega^3\rho r_0^2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kr_0)^n}{(n+1)(2n-1)!!}h_n(kr)Y_n(\theta,\ \varphi), \tag{53}$$

который обычно быстро сходится.

Выясним теперь физический смысл отдельных членов ряда (45).

Рассмотрим первый член, который, в силу того, что (см. гл. XIII, § 6

$$h_0(x)\equiv\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{e^{ix}}{ix},$$

может быть записан в виде

$$\frac{\omega^3\rho r_0^2}{a}\frac{ic_0}{h_0'(kr_0)(kr_0)^2}\frac{e^{ikr}}{ikr}.$$

Положим

$$\frac{ic_0}{h_0'(kr_0)(kr_0)^2}\equiv\alpha_0+i\beta_0=\alpha_0+\beta_0 e^{i\frac{\pi}{2}},$$

где α_0 и β_0 — вещественные числа. Тогда первый член распадается на два слагаемых:

$$\frac{\omega^3\rho r_0^2}{a}\alpha_0\frac{e^{ikr}}{ikr}\quad\text{и}\quad\frac{\omega^3\rho r_0^2}{a}\beta_0\frac{e^{ikr+i\frac{\pi}{2}}}{ikr}.$$

Сравнив их с выражением (25), видим, что они соответствуют полям *точечных источников* с производительностями

$$Q_{0\alpha}=4\pi r_0^2\omega\alpha_0\quad\text{и}\quad Q_{0\beta}=4\pi r_0^2\omega\beta_0$$

и фазой, *взаимно сдвинутой* на $\frac{\pi}{2}$.

Чтобы выяснить физический смысл второго члена, найдем соответствующее ему распределение радиальных скоростей v_r у поверхности шара. В силу формул (4) и (45):

$$v_r=-\frac{i}{\rho\omega}\frac{\partial p}{\partial r}=-\frac{i}{\rho\omega}\frac{\partial}{\partial r}i\rho\omega a\frac{h_1(kr)}{h_1'(kr_0)}Y_1(\theta,\ \varphi)=\frac{h_1'(kr)}{h_1'(kr_0)}\omega Y_1(\theta,\ \varphi),$$

откуда

$$v_r\big|_{r=r_0}=\omega Y_1(\theta,\ \varphi).$$

Но в силу (43):

$$Y_1(\theta,\ \varphi)=a_{10}P_1(\cos\theta)+P_{11}(\cos\theta)(a_{11}\cos\varphi+b_{11}\sin\varphi)=$$
$$=a_{10}\cos\theta+\sin\theta(a_{11}\cos\varphi+b_{11}\sin\varphi).$$

Представляя каждую из комплексных величин a_{10}, a_{11} и b_{11} в виде

$$a_{10}=\alpha_1+\gamma_1 e^{i\frac{\pi}{2}},\quad a_{11}=\alpha_{11}+\gamma_{11}e^{i\frac{\pi}{2}},\quad b_{11}=\beta_{11}+\delta_{11}e^{i\frac{\pi}{2}},$$

разобьем выражение $\omega Y_1(\theta, \varphi)$ на два слагаемых. Первое из них равно

$$\omega Y_{1b}(\theta, \varphi) = \omega [\alpha_1 \cos\theta + \sin\theta (\alpha_{11} \cos\varphi + \beta_{11} \sin\varphi)]. \qquad (54)$$

В частности, при $\alpha_{11} = \beta_{11} = 0$ получим $v_r|_{r=r_0} = \omega\alpha_1 \cos\theta$. Но нетрудно видеть, что именно такое распределение радиальных скоростей имеет место при гармонических колебаниях жесткого шара, происходящих с круговой частотой ω и амплитудой α_1 вдоль полярной оси сферической системы координат. Руководствуясь этим обстоятельством, рассмотрим случай колебаний шара с амплитудой s_1 вдоль оси, направление которой определяется углами $\theta = \theta'$ и $\varphi = \varphi'$. В этом случае радиальная скорость v_r точки на поверхности рассматриваемого шара с координатами θ, φ (равная проекции скорости колебаний центра шара на направление, заданное углами θ, φ) определится соотношением

$$v_r|_{r=r_0} = (\omega s_1 \cos\theta') \cos\theta + \sin\theta [(\omega s_1 \sin\theta' \cos\varphi'] \cos\varphi + \\ + (\omega s_1 \sin\theta' \sin\varphi') \sin\varphi],$$

которое совпадает с соотношением (54), если

$$s_1 \cos\theta' = \alpha_1, \quad s_1 \sin\theta' \cos\varphi' = \alpha_{11}, \quad s_1 \sin\theta' \sin\varphi' = \beta_{11},$$

т. е. если

$$\left.\begin{aligned} s_1^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_{11}^2 + \beta_{11}^2, \\ \operatorname{tg}\theta' &= \frac{\sqrt{\alpha_{11}^2 + \beta_{11}^2}}{\alpha_1}, \\ \operatorname{tg}\varphi' &= \frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}}. \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Совершенно таким же образом найдем, что второе слагаемое в $\omega Y_1(\theta, \varphi)$, содержащее множитель $e^{i\frac{\pi}{2}}$, также дает поле, соответствующее гармоническому колебанию жесткого шара, но, вообще говоря, происходящему с другой амплитудой и вдоль другой оси. Амплитуду и направление колебания определим, произведя в формулах (55) замены: $\alpha_1 \to \gamma_1$, $\alpha_{11} \to \gamma_{11}$, $\beta_{11} \to \delta_{11}$. Кроме того, фаза второго колебания *сдвинута на* $\frac{\pi}{2}$ по отношению к фазе первого.

Как и при рассмотрении первого члена ряда (45), мы можем ввести точечный объект, который называют *акустическим* или *колебательным диполем*. Под ним будем понимать гармонически колеблющийся вдоль некоторого направления шар, поперечник которого пренебрежимо мал по сравнению с длиной излучаемых волн. Для читателя не доставит затруднений убедиться, что второй член разложения (45) при $r > r_0$ соответствует полю *двух* надлежаще ориентированных акустических диполей с фазами, взаимно сдвинутыми на $\frac{\pi}{2}$.

Рассматривая последовательно члены ряда (45) можно было бы продолжить построение *акустических мультиполей*. Мы предпочтем, однако, несколько иной подход к делу, тем более, что существенное практическое значение имеет лишь модель (колеблющийся шарик) акустического диполя.

Каждая из сферических функций $Y_n(\theta, \varphi)$ и входящих в ее состав слагаемых дает распределение колебаний поверхности шара, характеризуемое, во-первых, определенной *степенью симметрии* — определенным числом и взаимным расположением осей и плоскостей симметрии и, во-вторых, определенной ориентацией этих фигур симметрии в пространстве. Особенностью каждой из указанных фигур симметрии является то, что соответствующая им картина поля на всех шаровых поверхностях, концентричных с шаровым источником, подобна, что, вообще говоря, не имеет места при произвольной картине поля.

С аналогичным положением мы встречались уже при рассмотрении электростатического поля произвольной системы зарядов. Как было показано в гл. XX, §§ 3—4, поле произвольной системы зарядов может быть представлено в виде разложения по мультиполям разного порядка:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y_k(\theta, \varphi)}{r^{k+1}}. \tag{56}$$

С ростом r роль отдельных слагаемых меняется, так что, если при некотором значении r основную роль играет, например, слагаемое с $k=n_1$, то с ростом r рано или поздно эта роль перейдет к слагаемому с $k=n_2<n_1$ (если только все слагаемые с $k<n_1$ не равны тождественно нулю). Картина поля все более *приближается к симметричной картине*, соответствующей мультиполю наименьшего порядка, для которого мультипольный момент системы не равен нулю. Так, при достаточном удалении от произвольной системы зарядов с полным зарядом, неравным нулю, поле этой системы близко к сферически симметричному полю точечного заряда. Если полный заряд системы равен нулю, но дипольный момент отличен от нуля, то на достаточном удалении поле близко к полю диполя и т. д.

Наоборот, поле каждого отдельного мультиполя $\frac{Y_k(\theta, r)}{r^{k+1}}$ с ростом r лишь убывает, картины же его на всех шаровых поверхностях с центром в $r=0$ в точности *подобны*.

В силу замкнутости системы сферических функций, мультиполи (или системы, по создаваемому полю эквивалентные *одному* мультиполю) *исчерпывают* все системы, обладающие этим свойством. Действительно, предположим, что им обладает также некоторая система, не приводящаяся к одному мультиполю. Тогда она, согласно § 3—4 гл. XIX, может быть представлена как сумма (конечная или бесконечная) мультиполей разных порядков, расположенных в точке $r=r_0$. Но поля мультиполей разных порядков с ростом r меняются по различным законам, и система не может обладать требуемым свойством. Полученное противоречие и доказывает сделанное утверждение.

Свойством создавать поля, подобные на бесконечной системе концентрических шаровых поверхностей произвольного радиуса, и может быть определен мультиполь. В частности, под *акустическим* или *колебательным* мультиполем мы будем понимать *точечный источник*, создающий в однородной среде поле, имеющее следующие свойства: а) оно удовлетворяет уравнению Гельмгольца, б) фаза колебаний поля зависит только от расстояния до источника (так что, в частности, в любой точке произвольной шаровой поверхности с центром в точке расположения источника фаза колебаний одинакова), в) на всех шаровых поверхностях с центром в точке расположения источника поля подобны, г) удовлетворяется условие излучения. Излучающая система, поле которой начиная с некоторого расстояния подобно полю мультиполя, может быть названа *приводящейся к мультиполю.*

Продолжим теперь сравнение между электростатическим и акустическим полями.

Подставив в ряд (53) выражение (36) для $h_n(kr)$ при малых значениях аргумента, получим разложение

$$p=-i\omega^2\rho r_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}Y_n(\theta,\ \varphi)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1}\qquad (kr\ll 1). \tag{57}$$

Если включить здесь множители $\left(-\frac{i\omega^2\rho r_0^{n+2}}{n+1}\right)$ в состав функций $Y_n(\theta,\ \varphi)$, мы получим ряд, формально полностью совпадающий с рядом (56); поэтому к полю p, *в пределах применимости ряда* (57), приложимо то, что было сказано о поле системы электрических зарядов.

В характере обоих полей есть, однако, существенные отличия. Во-первых, они обусловлены тем, что при $kr\gg n$ поле давления акустических мультиполей всех порядков убывает лишь пропорционально $\frac{1}{r}$. Это следует из соотношения (37). Поэтому, в отличие от электростатического поля, в котором роль мультипольных моментов высших порядков по мере удаления от системы зарядов становится сколь угодно малой, в акустическом поле, по мере роста r, разница в темпе убывания полей мультиполей разных порядков становится все менее ощутимой. В результате, зависимость давления в акустическом поле от угловых координат с ростом r, вообще говоря, стремится не к зависимости, соответствующей некоторому акустическому мультиполю, но к специфической в каждом случае зависимости. Это ясно видно также из следующего. Пусть $n_0 \ll kr$. Тогда сумма членов ряда (45) с $n < n_0$ в силу (37) приближенно равна

$$p_{n_0} = \frac{i\rho\omega a}{h_0'(kr_0)} \frac{e^{ikr}}{ikr} \sum_{n=0}^{n_0} (-i)^n \frac{h_0'(kr_0)}{h_n'(kr_0)} Y_n(\theta, \varphi). \tag{58}$$

Входящий в это выражение ряд

$$\psi(\theta, \varphi, n_0) \equiv \sum_{n=0}^{n_0} (-i)^n \frac{h_0'(kr_0)}{h_n'(kr_0)} Y_n(\theta, \varphi) \tag{59}$$

не зависит от r и при $kr \to \infty$, $n_0 \to \infty$ и определяет указанную предельную зависимость.

Таким образом, если электростатическое поле по мере удаления от источника сколь угодно близко приближается к полю мультиполя некоторого порядка (т. е. любая система неподвижных электрических зарядов *приводится к мультиполю*), то в акустическом поле это обстоятельство, вообще говоря, не имеет места. Однако роль мультиполей высшего порядка в акустическом поле обычно невелика, что можно, например, ожидать, ввиду быстрого убывания членов ряда (53), обусловленного наличием множителя $\frac{1}{(2n-1)!!}$.

Во-вторых, различие между электростатическими и акустическими полями обусловлено тем, что акустические поля (и вообще колебательные поля) могут отличаться друг от друга не только амплитудой, но и *фазой*, что не имеет места в случае электростатического поля. Поэтому каждый член разложений (45) и (53) соответствует полю не одного мультиполя, а двух, отличающихся фазой колебаний.

В силу формул (4) и (58) радиальная скорость среды, обусловленная мультиполями с $n \leqslant n_0$, при $kr \gg n_0$ равна

$$v_{rn_0} \approx \frac{\omega^3 r_0^2}{a^2} \frac{e^{ikr}}{ikr} \psi(\theta, \varphi, n_0) + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \tag{60}$$

Тангенциальные компоненты скорости v_θ и v_φ имеют порядок $\frac{1}{r^2}$, как это ясно из выражений для операторов дифференцирования по направлениям касательных к линиям $\varphi = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Поэтому при большом удалении от излучающей системы и малой роли мультиполей высших порядков движение среды, в основном, радиальное.

Пользуясь соотношением (7) и полагая, что давление звукового поля достаточно хорошо представимо в форме

$$p \approx \frac{i\rho\omega a}{h_0'(kr_0)} \frac{e^{ikr}}{ikr} \psi(\theta, \varphi, \infty),$$

найдем, что интенсивность поля на большом удалении от излучателя равна

$$I = \frac{|p^2|}{2\rho a} = \frac{\omega^4 \rho r_0^4 c_0^2}{2ar^2} F(\theta, \varphi) = \frac{\omega^2 \rho}{32\pi^2 a} \frac{Q_0^2}{r^2} F(\theta, \varphi),$$

где

$$F(\theta, \varphi) = \frac{1}{c_0^2} |\psi(\theta, \varphi, \infty)|^2 \tag{61}$$

— так называемая *функция углового распределения интенсивности излучения*, а

$$Q_0 = 4\pi r_0^2 \omega c_0 \tag{62}$$

— „средняя производительность" источника. Для равномерно пульсирующего шара $F(\theta, \varphi) = 1$.

ЗАДАЧИ

1. Исследовать поле излучения точечного источника низкой частоты, расположенного на поверхности шара.

Указание. Источник удобно расположить в полюсе шара $\theta = 0$. Тогда окажется, что

$$a_{n0} = \frac{1}{2\pi}\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{Q^2}{r_0^2}, \quad a_{nm} = b_{nm} = 0,$$

где Q — производительность источника. Точечный источник следует рассматривать как предельный случай источника, имеющего вид круговой площадки радиуса r' и производительность $(b\omega\pi r'^2)$.

2. Исследовать поле акустического квадруполя.

§ 7. Рассеяние звука

Если звуковая волна встречает препятствие, она частично отражается от него, а частично проходит внутрь. В результате первоначальное направление распространения волны изменяется. Этот процесс называют *рассеянием* или *дифракцией* звуковых волн.

Рассмотрим стационарное звуковое поле, которое устанавливается в однородной среде, характеризуемой плотностью ρ и скоростью звука a, при наличии в ней однородного же тела, характеризуемого плотностью ρ_i и скоростью звука a_i. Как и выше, звуковое поле будем характеризовать давлением p и круговой частотой ω звуковых колебаний. Среду будем предполагать заполняющей все пространство R_E, за исключением объема V, занятого телом.

Поле $p_0(x)$, которое существовало бы при отсутствии тела, назовем *падающей* волной, поле $p_i(x)$ внутри тела — *преломленной* волной, а поле $p_e(x)$, которое складываясь с падающей волной $p_0(x)$ дает действительное звуковое поле $p(x)$ в среде, — *отраженной* или *рассеянной* волной.