найдем, что интенсивность поля на большом удалении от излучателя равна

$$I = \frac{|p^2|}{2\rho a} = \frac{\omega^4 \rho r_0^4 c_0^2}{2ar^2} F(\theta, \varphi) = \frac{\omega^2 \rho}{32\pi^2 a} \frac{Q_0^2}{r^2} F(\theta, \varphi),$$

где

$$F(\theta, \varphi) = \frac{1}{c_0^2} |\psi(\theta, \varphi, \infty)|^2 \tag{61}$$

— так называемая *функция углового распределения интенсивности излучения*, а

$$Q_0 = 4\pi r_0^2 \omega c_0 \tag{62}$$

— „средняя производительность" источника. Для равномерно пульсирующего шара $F(\theta, \varphi) = 1$.

ЗАДАЧИ

1. Исследовать поле излучения точечного источника низкой частоты, расположенного на поверхности шара.

Указание. Источник удобно расположить в полюсе шара $\theta = 0$. Тогда окажется, что

$$a_{n0} = \frac{1}{2\pi}\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{Q^2}{r_0^2}, \quad a_{nm} = b_{nm} = 0,$$

где Q — производительность источника. Точечный источник следует рассматривать как предельный случай источника, имеющего вид круговой площадки радиуса r' и производительность $(b\omega\pi r'^2)$.

2. Исследовать поле акустического квадруполя.

§ 7. Рассеяние звука

Если звуковая волна встречает препятствие, она частично отражается от него, а частично проходит внутрь. В результате первоначальное направление распространения волны изменяется. Этот процесс называют *рассеянием* или *дифракцией* звуковых волн.

Рассмотрим стационарное звуковое поле, которое устанавливается в однородной среде, характеризуемой плотностью ρ и скоростью звука a, при наличии в ней однородного же тела, характеризуемого плотностью ρ_i и скоростью звука a_i. Как и выше, звуковое поле будем характеризовать давлением p и круговой частотой ω звуковых колебаний. Среду будем предполагать заполняющей все пространство R_E, за исключением объема V, занятого телом.

Поле $p_0(x)$, которое существовало бы при отсутствии тела, назовем *падающей* волной, поле $p_i(x)$ внутри тела — *преломленной* волной, а поле $p_e(x)$, которое складываясь с падающей волной $p_0(x)$ дает действительное звуковое поле $p(x)$ в среде, — *отраженной* или *рассеянной* волной.

Ввиду однородности тела и среды, в их внутренних точках давление удовлетворяет однородным уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta p_i + k_i^2 p_i = 0, \quad k_i^2 \equiv \frac{\omega^2}{a_i^2}, \quad x \in V - \mathcal{F}V,$$

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad k^2 \equiv \frac{\omega^2}{a^2}, \quad x \in R_E - V.$$

Так как $p_e(x) = p(x) - p_0(x)$, а падающая волна $p_0(x)$ также удовлетворяет уравнению Гельмгольца, то

$$\Delta p_e + k^2 p_e = 0, \quad \text{когда} \quad x \in R_E - V.$$

На бесконечности рассеянная волна $p_e(x)$ должна, очевидно, удовлетворять условию излучения:

$$\lim_{r \to \infty} r\left(\frac{\partial p_e}{\partial r} - ikp_e\right) = 0, \quad \lim_{r \to \infty} p_e = 0.$$

Наконец, на границе $\mathcal{F}V$ тела давление и скорость колебаний в теле и среде должны совпадать, что, в силу формулы (4), приведет к следующим *условиям сопряжения*:

$$p_i = p_e + p_0, \quad \frac{1}{\rho_i}\frac{dp_i}{dn} = \frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dn} + \frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dn}, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V,$$

где $\frac{d}{dn}$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали к границе области V.

Собрав воедино найденные соотношения и предполагая, что *падающая волна задана*, придем к следующей задаче:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta p_i = k_i^2 p_i = 0, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V; \\ &\Delta p_e + k^2 p_e = 0, \quad \text{когда} \quad x \in R_E - V; \\ &\lim_{r \to \infty} r\left(\frac{\partial p_e}{\partial r} - ikp_e\right) = 0, \quad \lim_{r \to \infty} p_e = 0, \\ &p_i = p_e + p_0, \quad \frac{1}{\rho_i}\frac{dp_i}{dn} = \frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dn} + \frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{\partial n}, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

представляющей одну из простейших задач *математической теории диффракции*.

Мы займемся этой задачей в предположении, что область V представляет шар, а падающая волна является плоской.

Введем сферические координаты r, θ, φ с началом в центре шара V и полярной осью, направленной навстречу падающей волне. При этом падающая волна может быть представлена выражением

$$p_0(r, \theta) = Ae^{ikr\cos\theta}, \tag{64}$$

не зависящим от координаты φ. Ввиду симметрии картины рассеяния относительно полярной оси, решение дифракционной задачи (63) также не будет зависеть от φ.

Следовательно, разложение рассеянной волны в ряд вида (94) гл. XXIV по частным решениям уравнения Гельмгольца будет иметь вид:

$$p_e = \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha (kr) P_\alpha (\cos\theta), \quad h_\alpha (kr) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H^{(1)}_{\alpha+\frac{1}{2}} (kr), \qquad (65)$$

где $H^{(1)}_{\alpha+\frac{1}{2}}(kr)$ — функция Ханкеля первого рода. Решение для преломленной волны будем искать в виде аналогичного ряда:

$$p_i = \sum_{\alpha=0}^{\infty} b_\alpha j_\alpha (k_i r) P_\alpha (\cos\theta), \quad j_\alpha (kr) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2k_i r}} J_{\alpha+\frac{1}{2}} (k_i r), \qquad (66)$$

в котором вместо функций Ханкеля стоят функции Бесселя, обеспечивающие ограниченность членов ряда при $r=0$. Из выражения (56) гл. XXIV для частных решений уравнения Гельмгольца следует, что члены последнего ряда удовлетворяют уравнению Гельмгольца.

Для определения неизвестных коэффициентов a_α, b_α, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, воспользуемся известным из теории бесселевых функций разложением выражения для плоской волны по сферическим функциям:

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (2\alpha+1)\, i^\alpha j_\alpha (kr) P_\alpha (\cos\theta).$$

Подставив указанные ряды в условия сопряжения и приравняв коэффициенты при $P_\alpha(\cos\theta)$, для определения коэффициентов получим уравнения:

$$b_\alpha j_\alpha (k_i r_0) - a_\alpha h_\alpha (kr_0) = A\,(2\alpha+1)\, i^\alpha j_\alpha (kr_0),$$
$$\frac{k_i}{\rho_i} b_\alpha j'\,(k_i r_0) - \frac{k}{\rho} a_\alpha h'_\alpha (kr_0) = A\,\frac{k}{\rho}\,(2\alpha+1)\, i^\alpha j'_\alpha (kr_0),$$

где r_0 — радиус граничной поверхности $\mathcal{F}V$. Найдя из этой системы уравнений коэффициенты a_α, b_α и подставив их в ряды (65) системы, найдем решение рассматриваемой дифракционной задачи (66).

ЗАДАЧИ

1. Сформулировать и решить задачу о рассеянии плоской звуковой волны (64) на абсолютно твердом неподвижном шаре V радиуса r_0.

Ответ: Формулировка задачи:

$$\Delta p_e + k^2 p_e = 0, \quad \text{когда} \quad r > r_0;$$
$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial p_e}{\partial r} - ikp_e\right) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} p_e = 0,$$
$$\frac{dp_e}{dr} = Aik\cos\theta e^{ikr\cos\theta}, \quad \text{когда} \quad r = r_0.$$

Решение:

$$p_e = -A \sum_{\alpha=0}^{\infty} (2\alpha+1)\, i^{\alpha} \frac{j_{\alpha}(kr_0)}{h'_{\alpha}(kr_0)} h_{\alpha}(kr)\, P_{\alpha}(\cos\theta).$$

Это решение получается, если во втором уравнении (67) положить $\rho_i = \infty$ и подставить найденные из него значения коэффициентов a_{α} в ряд (65).

2. Показать, что когда длина волны велика по сравнению с размерами шара $V\,(kr_0 \ll 1)$, то решение предыдущей задачи на большом удалении от шара $(kr \gg 1)$ может быть представлено приближенной формулой

$$p_e = -\frac{Ak^2 r_0^2}{3r}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right) e^{ikr}.$$

Указание. Следует воспользоваться приближенными выражениями для бесселевых функций при малых значениях аргумента.

ДОПОЛНЕНИЕ К ЧАСТИ ВТОРОЙ *

СВЕДЕНИЯ ОБ УРАВНЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ОБЩЕГО ВИДА

§ 1. Общий вид уравнения эллиптического типа

В соответствии с определением, данным во введении, будем говорить, что уравнение

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}} + cu = f, \tag{1}$$

где a_{ij}, b_i, c и f — функции, заданные в области V, принадлежит в этой области *эллиптическому типу*, если квадратичная форма

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} q_{\alpha} q_{\beta}$$

сохраняет в этой области знак и не обращается в нуль.

Число n является числом измерений области V. Ниже будут рассматриваться только трехмерные области $(n=3)$, однако результаты в равной мере приложимы как к плоским $(n=2)$, так и к многомерным $(n>3)$ областям.

Ниже будем предполагать, что функции a_{ij}, b_i, c и f непрерывны и, кроме того, что функции a_{ij}, а также функции

$$e_i \equiv b_i - \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial a_{i\beta}}{\partial x_{\beta}}$$

имеют непрерывные первые производные. При последнем условии уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_{\beta}} + \sum_{\alpha=1}^{n} e_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} + cu = f. \tag{2}$$