ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К уравнениям параболического типа приводят задачи, связанные с процессами теплопроводности и диффузии, с распространением электромагнитных полей в проводящих средах, с движением вязкой жидкости и др.

Простейшим представителем параболических уравнений является *уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right).$$

Глава XXVI

ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

§ 1. Первая граничная задача. Теорема о максимуме и минимуме

Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область пространства (x, y, z). Обозначим через Q в пространстве (x, y, z, t) цилиндр, основание которого есть область Ω и образующие которого параллельны оси Ot. Пусть $Q_{\text{т}}$ — часть этого цилиндра, ограниченная снизу плоскостью $t = 0$ и сверху плоскостью $t = T$ $(T > 0)$. Часть границы цилиндра $Q_{\text{т}}$, состоящую из его нижнего основания $(t = 0)$ и боковой поверхности, обозначим через Γ.

Рассмотрим следующую задачу: *найти в цилиндре $Q_{\text{т}}$ решение уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \Omega) \tag{2}$$

и граничному условию

$$u|_S = \Psi(P, t) \quad (t \in [0, T]), \tag{3}$$

где S — граница области Ω, P — точка поверхности S. Функции φ и Ψ непрерывны, причем значения Ψ при $t=0$ совпадают со значениями φ на границе S.

Задача нахождения решения уравнения (I) при условиях (2), (3) называется *первой граничной задачей* для уравнения теплопроводности.

Теорема. *Функция $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющая однородному уравнению теплопроводности* (1) *внутри цилиндра $Q_т$ и непрерывная вплоть до его границы, принимает наибольшее и наименьшее значения на* Γ, *т. е. или при* $t=0$, *или на боковой поверхности цилиндра* $Q_т$.

Так как теорема о минимуме сводится к теореме о максимуме переменой знака у $u(x, y, z, t)$, то мы ограничимся доказательством теоремы о максимуме.

Обозначим через M наибольшее значение функции $u(x, y, z, t)$ в цилиндре $Q_т$, а через m — наибольшее значение $u(x, y, z, t)$ на Γ. Допустим, что существует такое решение $u(x, y, z, t)$, для которого $M > m$, т. е. для которого теорема о максимуме неверна. Пусть эта функция принимает значение M в точке (x_0, y_0, z_0, t_0), где (x_0, y_0, z_0) принадлежит Ω и $0 < t_0 \leqslant T$.

Рассмотрим функцию

$$v(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \frac{M-m}{6d^2}\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right],$$

где d — диаметр области Ω. На боковой поверхности цилиндра $Q_т$ и на его нижнем основании

$$v(x, y, t) \leqslant m + \frac{M-m}{6} = \frac{M}{6} + \frac{5m}{6} < M,$$

а

$$v(x_0, y_0, z_0, t_0) = M.$$

Следовательно, $v(x, y, z, t)$, так же как и $u(x, y, z, t)$, не принимает наибольшего значения ни на боковой поверхности $Q_т$ ни на его нижнем основании. Пусть $v(x, y, z, t)$ принимает наибольшее значение в точке (x_1, y_1, z_1, t_1), где (x_1, y_1, z_1) лежит внутри Ω и $0 < t_1 \leqslant T$. Тогда в этой точке вторые производные $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ неположительны и $\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0$ $\left(\text{если } t_1 < T, \text{ то } \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \text{ если же } t_1 = T, \text{ то } \frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0\right)$, откуда следует, что в точке (x_1, y_1, z_1, t_1)

должно быть

$$\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\geqslant 0. \tag{4}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)=$$
$$=\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-a^2\frac{M-m}{d^2}=-a^2\frac{M-m}{d^2}<0,$$

что противоречит (4), и теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает, что:

1) *Решение первой граничной задачи* (1)—(2) *в цилиндре* $Q_т$ *единственно*. В самом деле, если бы мы имели два каких-либо решения u_1 и u_2 задачи, то их разность $w=u_1-u_2$, удовлетворяя однородному уравнению (1), обращалась бы в нуль как при $t=0$, так и на поверхности S области Ω. Но тогда, в силу теоремы о максимуме и минимуме, следует, что w равна тождественно нулю в области Ω при $0\leqslant t\leqslant T$, т. е. $u_1=u_2$.

2) *Решение первой граничной задачи* (1)—(2) *непрерывно зависит от правых частей начального и граничного условий*. Действительно, если разность функций, входящих соответственно в начальное и граничное условия, по абсолютной величине не превосходит некоторого положительного числа ε, то и разность $w=u_1-u_2$ соответствующих решений, как решение однородного уравнения теплопроводности с малыми начальным и граничным значениями, во всем цилиндре $Q_т$ по абсолютной величине также не будет превосходить ε.

§ 2. Задача Коши

Постановка задачи Коши. *Найти функцию* $u(x,\ t)$ $(t>0,\ -\infty<x<\infty)$, *удовлетворяющую уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5}$$

и начальному условию

$$u|_{t=0}=\varphi(x)\quad(-\infty<x<\infty), \tag{6}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная и ограниченная функция.

Докажем единственность решения задачи Коши, предполагая, что решение $u(x,\ t)$ ограничено во всей области, т. е. существует такое число M, что $|u(x,\ t)|<M$ для всех $-\infty<x<\infty$ при любом $t\geqslant 0$.

Пусть $u_1(x,\ t)$ и $u_2(x,\ t)$ — два решения уравнения (5), удовлетворяющие одному и тому же начальному условию (6). Тогда разность

$$w(x,\ t)=u_1(x,\ t)-u_2(x,\ t)$$