должно быть

$$\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\geqslant 0. \tag{4}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-a^2\frac{M-m}{d^2}=-a^2\frac{M-m}{d^2}<0,$$

что противоречит (4), и теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает, что:

1) *Решение первой граничной задачи* (1)—(2) *в цилиндре* $Q_т$ *единственно*. В самом деле, если бы мы имели два каких-либо решения u_1 и u_2 задачи, то их разность $w=u_1-u_2$, удовлетворяя однородному уравнению (1), обращалась бы в нуль как при $t=0$, так и на поверхности S области Ω. Но тогда, в силу теоремы о максимуме и минимуме, следует, что w равна тождественно нулю в области Ω при $0\leqslant t\leqslant T$, т. е. $u_1=u_2$.

2) *Решение первой граничной задачи* (1)—(2) *непрерывно зависит от правых частей начального и граничного условий*. Действительно, если разность функций, входящих соответственно в начальное и граничное условия, по абсолютной величине не превосходит некоторого положительного числа ε, то и разность $w=u_1-u_2$ соответствующих решений, как решение однородного уравнения теплопроводности с малыми начальным и граничным значениями, во всем цилиндре $Q_т$ по абсолютной величине также не будет превосходить ε.

§ 2. Задача Коши

Постановка задачи Коши. *Найти функцию* $u(x, t)$ $(t>0,$ $-\infty<x<\infty)$, *удовлетворяющую уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5}$$

и начальному условию

$$u|_{t=0}=\varphi(x)\quad(-\infty<x<\infty), \tag{6}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная и ограниченная функция.

Докажем единственность решения задачи Коши, предполагая, что решение $u(x, t)$ ограничено во всей области, т. е. существует такое число M, что $|u(x, t)|<M$ для всех $-\infty<x<\infty$ при любом $t\geqslant 0$.

Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — два решения уравнения (5), удовлетворяющие одному и тому же начальному условию (6). Тогда разность

$$w(x, t)=u_1(x, t)-u_2(x, t)$$

будет удовлетворять уравнению (5) и начальному условию

$$w|_{t=0}=0.$$

Кроме того, $w(x, t)$ ограничена во всей области

$$|w(x, t)| \leqslant |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| \leqslant 2M.$$

Теорему о максимуме и минимуме к неограниченной области непосредственно применить нельзя, ибо функция $w(x, t)$ может нигде не достигать наибольшего или наименьшего значений. Чтобы воспользоваться этой теоремой, рассмотрим конечную область

$$|x| \leqslant L, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{7}$$

Возьмем функцию

$$v(x, t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right),$$

которая является решением уравнения теплопроводности (5). Легко видеть, что

$$v(x, 0) \geqslant w(x, 0) = 0,$$
$$v(\pm L, t) \geqslant 2M \geqslant |w(\pm L, t)|.$$

Применяя теорему о максимуме и минимуме к разности между функциями $v(x, t)$ и $\pm w(x, t)$ в области (7), будем иметь:

$$v(x, t) - w(x, t) \geqslant 0, \quad v(x, t) + w(x, t) \geqslant 0,$$

откуда

$$-v(x, t) \leqslant w(x, t) \leqslant v(x, t)$$

или

$$|w(x, t)| \leqslant v(x, t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right).$$

Фиксируя значения (x, t) и устремляя L к бесконечности, получим

$$w(x, t) \equiv 0,$$

что и доказывает единственность решения задачи Коши.

Глава XXVII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В БЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ

§ 1. Распространение тепла в неограниченном стержне

Задача о распространении тепла в *неограниченном однородном стержне*, боковая поверхность которого теплоизолирована, математически формулируется следующим образом.