будет удовлетворять уравнению (5) и начальному условию

$$w|_{t=0}=0.$$

Кроме того, $w(x, t)$ ограничена во всей области

$$|w(x, t)| \leqslant |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| \leqslant 2M.$$

Теорему о максимуме и минимуме к неограниченной области непосредственно применить нельзя, ибо функция $w(x, t)$ может нигде не достигать наибольшего или наименьшего значений. Чтобы воспользоваться этой теоремой, рассмотрим конечную область

$$|x| \leqslant L, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{7}$$

Возьмем функцию

$$v(x, t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right),$$

которая является решением уравнения теплопроводности (5). Легко видеть, что

$$v(x, 0) \geqslant w(x, 0) = 0,$$
$$v(\pm L, t) \geqslant 2M \geqslant |w(\pm L, t)|.$$

Применяя теорему о максимуме и минимуме к разности между функциями $v(x, t)$ и $\pm w(x, t)$ в области (7), будем иметь:

$$v(x, t) - w(x, t) \geqslant 0, \quad v(x, t) + w(x, t) \geqslant 0,$$

откуда

$$-v(x, t) \leqslant w(x, t) \leqslant v(x, t)$$

или

$$|w(x, t)| \leqslant v(x, t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right).$$

Фиксируя значения (x, t) и устремляя L к бесконечности, получим

$$w(x, t) \equiv 0,$$

что и доказывает единственность решения задачи Коши.

Глава XXVII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В БЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ

§ 1. Распространение тепла в неограниченном стержне

Задача о распространении тепла в *неограниченном однородном стержне*, боковая поверхность которого теплоизолирована, математически формулируется следующим образом.

Найти ограниченную функцию $u(x, t)$ $(t \geqslant 0, \ -\infty < x < \infty)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (t > 0, \ -\infty < x < \infty) \tag{1}$$

и начальному условию

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная ограниченная функция.

Найдем сначала частные решения уравнения (1) вида

$$u = T(t) X(x). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), имеем

$$T'(t) X(x) = a^2 T(t) X''(x)$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

где λ^2 — постоянная. Мы получаем, таким образом,

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \ \ X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$

откуда, отбрасывая постоянный множитель в выражении $T(t)$:

$$T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}, \qquad X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Постоянные A и B могут зависеть от λ. Так как граничные условия отсутствуют, то параметр λ остается совершенно произвольным.

Согласно (3) получим, что

$$u(x, t) = e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x] \tag{4}$$

есть частное решение уравнения (1) при любых $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Интегрируя (4) по параметру λ, также получим решение уравнения (1):

$$u(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, d\lambda, \tag{5}$$

если этот интеграл сходится и его можно дифференцировать один раз по t и два раза по x под знаком интеграла.

Выберем $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ так, чтобы выполнялось и начальное условие (2). Полагая в (5) $t = 0$, получим, в силу (2),

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, d\lambda. \tag{6}$$

Сравнивая интеграл в правой части с интегралом Фурье для функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi+\sin\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi\right]d\lambda,$$

мы видим, что можно удовлетворить равенству (6), положив

$$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi;\quad B(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5), получаем:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi$$

или, изменяя порядок интегрирования,

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,d\xi\int_{0}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\xi-x)\,d\lambda. \tag{8}$$

Внутренний интеграл можно вычислить. Действительно, положим

$$a\lambda\sqrt{t}=z,\quad \lambda(\xi-x)=\mu z,$$

откуда

$$d\lambda=\frac{dz}{a\sqrt{t}},\quad \mu=\frac{\xi-x}{a\sqrt{t}}.$$

Поэтому

$$\int_{0}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\xi-x)\,d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}\cos\mu z\,dz=\frac{1}{a\sqrt{t}}\,J(\mu). \tag{9}$$

Дифференцируя интеграл $J(\mu)$ по параметру μ, найдем, что

$$J'(\mu)=-\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}z\sin\mu z\,dz,$$

причем это дифференцирование законно в силу равномерной сходимости полученного интеграла. Интегрируя теперь по частям, получаем

$$J'(\mu) = -\frac{\mu}{2}\int_0^\infty e^{-z^2}\cos\mu z\,dz = -\frac{\mu}{2}J(\mu),$$

отсюда

$$J(\mu) = Ce^{-\frac{\mu^2}{4}}.$$

Чтобы найти постоянную C, полагаем здесь $\mu = 0$. Это дает

$$C = J(0) = \int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Поэтому

$$J(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\mu^2}{4}},$$

и, в силу (9),

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)\,d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}.$$

Подставив это соотношение в (8), окончательно найдем:

$$u(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что функция

$$v(x,\ t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}, \tag{11}$$

рассматриваемая как функция от $(x,\ t)$, является решением уравнения (1). Функцию (11) называют *фундаментальным решением* уравнения теплопроводности (I).

Докажем, что для любой непрерывной и ограниченной функции $\varphi(x)$ функция (10) удовлетворяет уравнению теплопроводности (1). Для этого нам достаточно показать, что интеграл (10), а также интегралы, полученные его формальным дифференцированием под знаком интеграла по x и t сколько угодно раз, равномерно сходятся в любом прямоугольнике $[-l \leqslant x \leqslant l,\ t_0 \leqslant t \leqslant T]$, где $t_0 > 0$. Действительно, дифференцируя (10) несколько раз по x и t, мы получим сумму интегралов. Покажем, что каждый интеграл равномерно сходится. После дифференцирования под знаком интеграла выделяется множитель $\xi - x$ в положительной степени, который остается под знаком интеграла, и множитель t в некоторой степени, который можно вынести из-под знака интеграла. Таким образом, мы получим сумму интегралов

Умножим (14) на $\varphi(x)$ и вычтем из (13), тогда получим:

$$u(x, t)-\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(x+2a\alpha\sqrt{t})-\varphi(x)\right] e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

откуда

$$|u(x, t)-\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+2a\alpha\sqrt{t})-\varphi(x)| e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

В силу ограниченности функции $\varphi(x)$ при любых x, t и α мы имеем

$$|\varphi(x+2a\alpha\sqrt{t})-\varphi(x)| \leqslant 2M.$$

Пусть ε — сколь угодно малое положительное число. Можно найти столь большое положительное число N, что, в силу сходимости интеграла (13), будем иметь

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-\alpha^2} d\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{N}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

При этом из (14) будет следовать, что

$$|u(x, t)-\varphi(x)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N}|\varphi(x+2a\alpha\sqrt{t})-\varphi(x)| e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

В силу непрерывности $\varphi(x)$, можем утверждать, что при всех t, достаточно близких к нулю, и при $|\alpha| \leqslant N$

$$|\varphi(x+2a\alpha\sqrt{t})-\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и последнее неравенство дает

$$|u(x, t)-\varphi(x)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-\alpha^2} d\alpha$$

и тем более

$$|u(x, t)-\varphi(x)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

т. е., в силу (13), мы имеем

$$|u(x, t)-\varphi(x)| < \varepsilon$$

при всех t, достаточно близких к нулю. Отсюда ввиду произвольности ε следует, что

$$\lim_{t \to 0} u(x, t)=\varphi(x).$$

Таким образом, мы доказали, что функция

$$u(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

ограничена, удовлетворяет уравнению теплопроводности (1) и начальному условию (2).

Единственность полученного решения для непрерывной ограниченной функции $\varphi(x)$ следует из теоремы, доказанной в гл. XXVI, § 2.

Из формулы (10) следует, что тепло распространяется вдоль стержня не с какой-либо конечной скоростью, а мгновенно. Действительно, пусть начальная температура $\varphi(x)$ положительна для $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ и равна нулю вне этого отрезка. Тогда для последующего распределения температур получаем

$$u(x,\ t)=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi,$$

откуда видно, что при сколь угодно малых $t>0$ и сколь угодно больших x, $u(x,\ t)$ больше нуля. Это объясняется неточностью физических предпосылок, лежащих в основе теории теплопроводности.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Решение задачи (1)—(2) (задачи Коши) есть функция, непрерывно дифференцируемая сколь угодно раз по x и t вне зависимости от того, будет ли иметь производные функция $\varphi(x)$ или нет. Эта *гладкость* решений существенно отличает однородное уравнение теплопроводности, например, от уравнения колебания струны.

Выясним теперь *физический* смысл фундаментального решения (11) однородного уравнения теплопроводности (1).

Выделим малый элемент стержня $(x_0-h,\ x_0+h)$ около точки x_0 и будем считать, что функция $\varphi(x)$, дающая начальное распределение температуры, равна нулю вне промежутка $(x_0-h,\ x_0+h)$ и имеет постоянное значение u_0 внутри него. Физически можно представить себе дело так, что мы в начальный момент времени сообщили этому элементу количество тепла $Q=2hc\rho u_0$, которое вызвало повышение температуры на u_0 в этом участке стержня. В последующие моменты времени распределение температуры в стержне дается формулой (10), которая в нашем случае принимает вид:

$$u(x,\ t)=\int_{x_0-h}^{x_0+h}u_0\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi=$$

$$=\frac{Q}{c\rho 2a\sqrt{\pi t}}\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Если мы будем теперь уменьшать h до нуля, т. е. будем считать, что то же количество тепла Q распределяется на все меньшем участке и в пределе сообщается стержню в точке $x=x_0$, то мы приходим к понятию *мгновенного точечного источника тепла напряжения* Q, *помещенного в момент времени* $t=0$ *в точке* $x=x_0$. От действия такого мгновенного точечного источника тепла в стержне получается распределение температур по формуле

$$\lim_{h\to 0} \frac{Q}{2c\rho a\sqrt{\pi t}} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi. \tag{15}$$

Применив теорему о среднем, будем иметь

$$\frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi = e^{-\frac{(\xi_0-x)^2}{4a^2t}},$$

где

$$x_0-h < \xi_0 < x_0+h,$$

и так как $\xi_0 \to x_0$ при $h \to 0$, то выражение (15) принимает следующий вид:

$$\frac{Q}{c\rho} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}.$$

Таким образом, *фундаментальное решение* (11) *дает распределение температуры, которое вызывается мгновенным точечным источником тепла напряжения* $Q=c\rho$, *помещенным в начальный момент* $t=0$ *в точке* $x=\xi$ *стержня.*

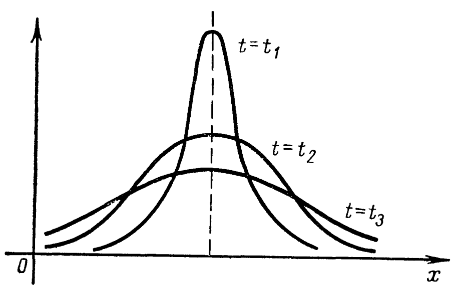

Рис. 47

Графики фундаментального решения

$$v(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \tag{11}$$

при фиксированном ξ как функции от x, в отдельные моменты времени $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ представлены на рис. 47. Площадь под каждой из этих кривых равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1.$$

Это означает, что количество тепла $Q=c\rho$ в стержне остается неизменным с течением времени. Из чертежа видно, что почти вся площадь, ограниченная кривой (11) и осью абсцисс, находится над промежутком $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$, где ε сколь угодно малое число, если только $t>0$ достаточно малое число. Величина этой площади, умноженная на $c\rho$, равна количеству тепла, помещенному в начальный момент. Таким образом, для малых значений $t>0$ почти все тепло сосредоточено в малой окрестности точки $x=\xi$. Из сказанного выше следует, что в момент времени $t=0$ все количество тепла помещается в точке $x=\xi$, т. е. мы имеем мгновенный точечный источник тепла.

Теперь нетрудно дать физическое толкование и решению (10). Действительно, для того чтобы придать сечению $x=\xi$ стержня температуру $\varphi(\xi)$ в начальный момент, мы должны распределить на малом элементе $d\xi$ около этой точки количество тепла $dQ = c\rho\varphi(\xi)\,d\xi$ или, что то же самое, поместить в точке ξ мгновенный точечный источник тепла напряжения dQ; распределение температуры, вызываемое этим мгновенным точечным источником, согласно формуле (11), будет

$$\varphi(\xi)\,d\xi\,\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}.$$

Общее же действие от начальной температуры $\varphi(\xi)$ во всех точках стержня суммируется из этих отдельных элементов, что и дает нам полученное выше решение (10).

Мы рассмотрели распространение тепла в неограниченном стержне. Аналогично, в случае распространения тепла в неограниченном пространстве мы имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

и начальное условие

$$u\,|_{t=0}=\varphi(x,\ y,\ z),$$

и решением будет функция

$$u(x,y,z,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4a^2-t}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

§ 2. Распространение тепла в полуограниченном стержне

Рассмотрим задачу о распространении тепла в *полуограниченном стержне*, боковая поверхность которого теплоизолирована. Пусть конец $x=0$ поддерживается при заданной температуре, которая может изменяться с течением времени. Тогда задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad (0<x<\infty,\ t>0), \tag{16}$$

при граничном условии

$$u\,|_{x=0}=\psi(t)\qquad (t\geqslant 0) \tag{17}$$